

---

## 1. Структура открытых и замкнутых множеств на прямой

Точка  $x_0$  называется **предельной** для множества  $E$ , если любая ее окрестность содержит по меньшей мере одну точку  $x$  из  $E$ , отличную от  $x_0$ . Если  $x_0 \in E$ , но не является предельной точкой, то она называется **изолированной** точкой  $E$ . Множество  $E'$  всех предельных точек  $E$  называется **производным** множеством для  $E$ . Если любая предельная точка  $E$  принадлежит этому множеству ( $E' \subseteq E$ ), то множество  $E$  называется **замкнутым**. Если  $E = E'$ , то множество  $E$  называется **совершенным**. Множество  $[E] = E + E'$  называется **замыканием**  $E$ . Точка  $x_0$  называется **внутренней** точкой множества  $E$ , если существует окрестность  $x_0$ , полностью лежащая в  $E$ . Множество  $E$  называется **открытым**, если все его точки внутренние.

**Теорема.** Всякое открытое множество на числовой прямой представляет собой сумму конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов (при этом рассматриваются также "бесконечные" интервалы).

**Доказательство.** Пусть  $x$  – произвольная точка множества  $E$ . Так как  $E$  – открыто, то существует окрестность  $V(x)$  этой точки, принадлежащая множеству  $E$ . Объединение всех содержащихся в  $E$  окрестностей  $V(x)$  точки  $x$  обозначим  $I(x)$ . Докажем, что  $I(x)$  – интервал. Пусть  $a = \inf I(x)$ ,  $b = \sup I(x)$  (Может быть  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ , если  $I(x)$  не ограничено. Достаточно доказать, что любая точка  $y \in (a, b)$  принадлежит множеству  $I(x)$ . Пусть (ради определенности)  $a < y < x$ . По определению точной нижней грани существует точка  $y' \in I(x)$  и такая что  $a < y' < y$ . Следовательно, существует окрестность  $V(x)$  точки  $x$ , содержащая точку  $y'$ , но  $y' < y < x$  и, значит,  $y \in V(x)$ , или  $y \in I(x)$ . Таким образом мы докажем, что  $I(x)$  – интервал. Далее, интервалы  $I(x_1)$  и  $I(x_2)$  при  $x_1 \neq x_2$  либо совпадают, либо не пересекаются. Ибо, если они содержат общую точку  $x$ , то оба они содержатся в множестве  $I(x)$ , а, значит, совпадают. Построив для каждой точки  $x \in E$  свой интервал  $I(x)$ , отберём интервалы, не содержащие общих точек (т.е. попарно не пересекающиеся). Каждый такой интервал содержит, очевидно, хотя бы одну рациональную точку. Так как множество рациональных чисел счётно, то число всех попарно непересекающихся интервалов не более, чем счётно. Теорема доказана.

**Следствие.** Всякое замкнутое множество получается из прямой выбрасыванием конечного или счетного числа интервалов.

**Следствие 2.** Любое совершенное множество на прямой получается удалением из  $\mathbb{R}$  конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов, которые не имеют общих концов друг с другом.

### Канторово множество.

Из единичного отрезка  $C_0 = [0, 1]$  удалим среднюю треть, т. е. интервал. Оставшееся точечное множество обозначим через  $C_1$ . Множество состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через  $C_2$ . Повторив эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех четырёх отрезков, получаем  $C_3$ . Обозначим через  $C$  пересечение всех  $C_i$ . Множество  $C$  называется Канторовым множеством.

Каждой точке множества можно поставить в соответствие последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , где  $a_i \in \{0; 2\}$ . Совокупность таких последовательностей образует множество мощности континуума  $\Rightarrow$  множество имеет мощность континуума. Кроме того, оно замкнуто и является совершенным (по следствию 2).

## 2. Внешняя мера и ее свойства. Измеримость открытого множества, объединения счетного числа измеримых множеств, измеримость замкнутого множества. Измеримость дополнения, пересечения счетного числа множеств

**Определение.** Внешней мерой  $\mu^*(A)$  множества  $A$  называется нижняя грань меры элементарных множеств, включающих множество  $A$ .

Свойства внешней меры.

$$1. (E_1 \subseteq E_2) \Rightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2) \text{ (монотонность)}$$

$$2. (E = \cup E_k, k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mu^*(E) \leq \sum \mu^*(E_k))$$

$$3. (\rho(E_1, E_2) > 0) \Rightarrow (\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2))$$

4. Для любого множества  $E$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  существует открытое множество  $G$ , содержащее  $E$ , и такое, что  $|G|^* \leq |E|^* + \varepsilon$ .

**Определение 1.** Покрытием  $s = s(E)$  множества  $E$  называется любая конечная или счётная система интервалов  $\{\Delta_n\}$  такая, что  $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ . Сумму длин всех интервалов  $\Delta_n$ , составляющих  $s = s(E)$ , обозначим  $\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leq \infty$ . Внешней мерой множества  $E$  называется  $\inf_{s(E)} \sigma(s)$  и обозначается  $|E|^* = \inf_{s(E)} \sigma(s)$ .

**Определение.** Множество  $A$  называется *измеримым по Лебегу*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое элементарное открытое множество  $B$ , что  $\mu^*(A \setminus B) < \varepsilon$ . Функция  $\mu^*$ , рассматриваемая только на измеримых множествах, называется *лебеговой мерой*  $\mu$ .

**Теорема.** Любое открытое множество измеримо, причем его мера равна сумме мер непересекающихся составляющих его интервалов.

**Доказательство.** Надо в определении 2 положить  $G = E$ .

**Теорема.** Любое замкнутое множество измеримо.

**Доказательство.** Пусть  $F$  – замкнуто и ограничено. В силу свойства IV внешней меры для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся открытое множество  $G$  такое, что  $F \subset G$  и  $|G|^* \leq |F|^* + \varepsilon$ . Множество  $G \setminus F$  – открыто, поэтому по теореме 1 из §1 имеет место представление  $G \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ , причём все интервалы  $\Delta_n = (a_n, b_n)$  попарно не пересекающиеся. Мы докажем

$$\text{оценку } |G \setminus F|^* = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leq \varepsilon$$

Для любого интервала  $\Delta = (a, b)$  и любого числа  $\alpha$  из промежутка  $0 < \alpha < \frac{b-a}{2}$  обозначим  $\Delta^\alpha = (a + \alpha, b - \alpha)$ ,  $\bar{\Delta}^\alpha = [a + \alpha, b - \alpha]$ , а если  $\alpha \geq \frac{b-a}{2}$ , то положим  $\Delta^\alpha = \bar{\Delta}^\alpha = \emptyset$ .

Для фиксированного номера  $n$  обозначим  $\bar{E}_n^\alpha = \bigcup_{k=1}^n \bar{\Delta}_k^\alpha$ ; ясно, что  $\left| \sum_n^\alpha \right|^* = \sum_{k=1}^n |\Delta_k^\alpha|$ . Множество

$\bar{E}_n^\alpha$  – замкнуто и так, как оно не пересекается с замкнутым множеством  $F$ , то расстояние между ними положительно и согласно свойству III внешней меры имеет место равенство

$$\left| \bar{E}_n^\alpha \cup F \right|^* \leq |G|^* \leq |F|^* + \varepsilon. \text{ Множество } F \text{ ограничено, поэтому мы получаем оценку } \left| \bar{E}_n^\alpha \right|^* \leq \varepsilon.$$

Переходя к пределу сначала при  $\alpha \rightarrow 0$ , а затем при  $n \rightarrow \infty$ , будем иметь неравенство

$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| \leq \varepsilon$ , которое позволяет завершить доказательство измеримости ограниченности множество  $F$ .

Если  $F$  – неограниченно, то воспользуемся представлением  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , где  $F_n = F \cap [-n, n]$  – замкнутые и ограниченные множества. По доказанному выше все  $F_n$  – измеримы, а, значит, по теореме 2 и само множество  $F$  – измеримо.

**Теорема 4.** Если множество  $E$  – измеримо, то и его дополнение  $CE$  также измеримо.

**Доказательство.** Так как  $E$  – измеримо, то для любого номера  $n$  существует открытое множество  $G$  такое, что  $E \subset G_n$  и  $|G_n \setminus E|^* < \frac{1}{n}$ . Обозначим  $F_n = CG_n$  – замкнутое множество, а, значит, по теореме 3 и измеримое. В силу  $CA \setminus CB = B \setminus A$  для любых множеств  $A$  и  $B$  имеем соотношение  $CE \setminus F_n = CE \setminus CG_n = G_n \setminus E$ , откуда следует включение  $CE \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset G_n \setminus E$ . Согласно

свойству I внешней меры справедливо неравенство  $\left| CE \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right|^* \leq |G_n \setminus E|^* < \frac{1}{n}$  для любого номера  $n$ . Таким образом внешняя мера множества  $E_0 = CE \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  равна нулю, или  $|E_0| = 0$ . А

так как  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset CE$ , то дополнения  $CE$  к множеству  $E$  является множеств  $E_0$  и  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ , то есть объединение измеримых множеств. По теореме 2 и само множество  $CE$  – измеримо.

**Следствие.** Для того, чтобы множество  $E$  было измеримым необходимо и достаточно, чтобы для любого  $\varepsilon > 0$  существовало замкнутое множество  $F$  такое, что  $F \subset E$  и  $|E \setminus F|^* < \varepsilon$ .

**Теорема 2.** Объединение конечного или счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством.

**Доказательство.** Пусть  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  и все  $E_n$  – измеримы. Тогда для любого  $E_n$  и любого

$\varepsilon > 0$  найдется открытое множество  $G_n$  такое, что  $E_n \subset G_n$  и  $|G_n \setminus E_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Положим

$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  и заметим вложение  $E \subset G$   $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus E_n)$  (если  $x \in G \setminus E$ , то  $x \notin E_n$  для всех

номеров  $n$ ,  $x \in G$ , следовательно,  $x \in G_k$  для некоторого номера  $k$  и, значит,  $x \in G_k \setminus E_k$ ). В силу свойства 2) внешней меры

$$|G \setminus E|^* \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G_n \setminus E_n|^* < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon.$$

**Теорема 5.** Пересечение конечного или счётного числа измеримых множеств является измеримым множеством.

**Доказательство.** Пусть  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ . В силу соотношения двойственности

$E = C \left[ \bigcup_{n=1}^{\infty} CE_n \right]$  утверждение этой теоремы следует из теорем 2 и 4.

**Теорема 6.** Разность двух измеримых множеств является измеримым множеством.

**Доказательство.** Следует заметить  $E \setminus B = A \cap CB$  и использовать теоремы 4 и

### 3. Свойство счетной аддитивности меры. Множества типа $G_\delta$ .

**Теорема 7.** ( $\sigma$ -аддитивность меры). Мера суммы конечного или счётного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.

**Доказательство.** Пусть  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  ( $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$ ). Рассмотрим сначала случай, когда все множества  $E_n$  - ограничены. В силу следствия из теоремы 4 для любого номера  $n$  и любого числа  $\varepsilon > 0$  найдётся замкнутое множество  $F_n$  такое, что  $F_n \subset E_n$  и  $|E_n \setminus F_n| < \frac{\varepsilon}{2^n}$  (поскольку все множества измеримы пишем только меру). Так как все множества  $F_n$  - замкнуты, ограничены и попарно не пересекаются, то по свойству III внешней меры имеет место равенство  $\left| \bigcup_{n=1}^m F_n \right| = \sum_{n=1}^m |F_n|$  для любого номера  $m$ . Из равенства  $E_n = (E_n \setminus F_n) \cup F_n$  и свойства II внешней меры имеем соотношение  $|E_n| \leq |E_n \setminus F_n| + |F_n| < |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$ , которое приводит к оценке  $\sum_{n=1}^m |E_n| \leq \sum_{n=1}^m |F_n| + \frac{\varepsilon}{2^n}$ , из которой следует неравенство  $\sum_{n=1}^m |E_n| \leq \sum_{n=1}^m \left| \bigcup_{n=1}^m F_n \right| + \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Но объединение всех множеств  $F_n$  содержится в множестве  $E$  и поэтому при любом  $m$  имеет место соотношение  $\left| \bigcup_{n=1}^m F_n \right| \leq |E|$ , приводящее к неравенству  $\sum_{n=1}^m |E_n| \leq |E| + \varepsilon$ .

Переходя к пределу сначала при  $m \rightarrow \infty$ , а затем при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим  $\sum_{n=1}^{\infty} |E_n| \leq |E|$ . С другой стороны, в силу свойства 2 внешней меры  $|E| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$  и теорема в этом случае доказана.

Если  $E_n$  - не ограничены, то введем обозначение  $E_n^k = E_n \cap (k, k+1]$  и запишем равенство  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} E_n^k$ . Множества  $E_n^k$  не пересекаются. По доказанному выше  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |E_n^k| = |E_n|$  и, значит,  $|E| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |E_n^k| = \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$ , что и требовалось доказать.

**Определение 3.** Если множество  $E$  представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств, то оно называется множеством типа  $G_\delta$ , а если  $E$  представимо в виде объединения счетного числа замкнутых множеств, то оно называется множеством типа  $F_\delta$ . Согласно утверждениям теорем 1-5 множества типа  $G_\delta$  и  $F_\delta$  - измеримы.

**Теорема 8.** Если множество  $E$  - измеримо, то существуют множества  $E_1$  - типа  $F_\delta$  и  $E_2$  - типа  $G_\delta$  и такие, что  $E_1 \subset E \subset E_2$ , причем  $|E_1| = |E| = |E_2|$ .

Приведём пример неизмеримого множества. Пусть  $C$  - окружность единичной длины и  $\alpha$  - некоторое иррациональное число. Отнесём к одному классу те точки окружности  $G$ , которые могут быть переведены одни в другие поворотом окружности на угол  $n\alpha\pi$ , где  $n$  - целое число. Каждый из этих классов будет состоять из счётного множества точек. Выберем из каждого такого класса по одной точке и покажем, что полученное таким образом множество  $\bar{\phi}_0$  - неизмеримо.

#### 4. Измеримые функции и их свойства

**Определение.** Пусть  $X$  и  $Y$  - два произвольных множества и в этих множествах выбраны системы подмножеств  $S_X$  и  $S_Y$  соответственно. Функция  $f: X \rightarrow Y$  называется  $(S_X, S_Y)$ -измеримой, если для любого подмножества  $A \in S_Y$  его прообраз содержится в  $S_X$ :  $f^{-1}(A) \in S_X$ .

**Определение 1.** Функция  $f(x)$ , определенная на измеримом множестве  $E$  называется измеримой на нем, если для любого числа  $a$  множество  $E[f \geq a]$  измеримо.

**Определение 2.** Две заданные на измеримом множестве  $E$  функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются эквивалентными, если множество  $E[f(x) \neq g(x)]$  имеет меру нуль. Обозначают эквивалентность функции формулой  $f(x) \sim g(x)$ .

**Определение 3.** Говорят, что некоторое свойство выполняется почти всюду на множестве  $E$ , если оно не выполняется на подмножестве множества  $E$  меры нуль.

Если функция  $f(x)$  непрерывна почти всюду на измеримом множестве  $E$ , то  $f(x)$  измерима на  $E$ . Если  $f(x)$  непрерывна на замкнутом множестве  $F$ , то  $f(x)$  измерима на  $F$ , ибо множество  $F[f \geq a]$  замкнуто при любом действительном числе  $a$ , и значит, измеримо.

**Теорема 1.** Если функция  $f(x)$  измерима на  $E$ , то  $|f(x)|$  также измерима на нём. Если  $C = \text{const}$ , то  $f(x) + C$  и  $C \cdot f(x)$  измеримы на  $E$ . Если  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы на  $E$ , то и множество  $E[f > g]$  – измеримо.

**Доказательство.** Пусть  $a \geq 0$ , тогда  $E[|f| \geq a] = E[f \geq a] \cup E[f \leq -a]$  и по теореме 2 из §2 это множество измеримо. Если  $a < 0$ , то  $E[|f| \geq a] = E$ . Для любого  $a$  имеем

$$\text{соотношение } E[f + c \geq a] = E[f \geq a - c] \text{ и } E[c \cdot f \geq a] = \begin{cases} E\left[f \geq \frac{a}{c}\right], & c > 0 \\ E\left[f \leq \frac{a}{c}\right], & c < 0. \end{cases}$$

При  $c = 0$  произведение  $c \cdot f(x) \equiv 0$  на  $E$ . Наконец, пусть  $\{r_k\}$  - последовательность всех рациональных чисел. Тогда

$$E[f > g] = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E[f > r_k] \cap E[g < r_k]).$$

**Теорема 2.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы на измеримом множестве  $E$ , то и функции  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$  и  $\frac{f}{g}$  ( $g \neq 0$ ) измеримы на  $E$ .

**Доказательство.**  $E[f \pm g > a] = E[f > \pm g + a]$  - измеримо по теореме 1;

$f \cdot g = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2$ , а квадрат измеримой функции измерим – доказательство как и для модуля  $|f|$ ;

так как

$$E\left[\frac{1}{g} > a\right] = \begin{cases} E[g > 0] \cap E\left[g < \frac{1}{a}\right] & \text{при } a > 0, \\ E[g > 0] & \text{при } a = 0, \\ E[g > 0] \cup E\left[g < \frac{1}{a}\right] & \text{при } a < 0, \end{cases}$$

то функция  $\frac{1}{g}$  - измерима, а значит и  $\frac{f}{g}$  - измерима.

**Теорема 3.** Если  $\{f_n(x)\}$  – последовательность измеримых на  $E$  функций, то нижний и верхний пределы этой последовательности – измеримы на  $E$  (ограниченность функций не предполагается).

**Доказательство.** Заметим, что  $\varphi(x) = \inf_n f_n(x)$  и  $\psi(x) = \sup_n f_n(x)$  измеримы на  $E$ . В самом деле,  $E[\varphi < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a]$ ,  $E[\psi > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n > a]$  и в силу теоремы 2 из §2  $\varphi$  и  $\psi$  – измеримы. Пусть  $\overline{f}(x)$  и  $\underline{f}(x)$  – верхний и нижний пределы последовательности  $\{f_n(x)\}$ . Поскольку  $\underline{f}(x) = \sup_{k \geq 1} \left\{ \inf_{k \geq n} f_k(x) \right\}$ ,  $\overline{f}(x) = \inf_{k \geq 1} \left\{ \sup_{k \geq n} f_k(x) \right\}$ , то, по доказанному выше, они измеримы.

**Теорема 4.** Если  $\{f_n(x)\}$  – последовательность измеримых на  $E$  функций, сходится почти всюду на  $E$  к функции  $f(x)$ , то  $f(x)$  измерима на  $E$ .

**Доказательство.** Если  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  всюду на  $E$ , то теорема 4 есть следствие теоремы 3. Если  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  всюду на  $E$  кроме множества  $E_0$  меры нуль, то  $f(x)$  измерима на  $E \setminus E_0$  по теореме 3 и измерима на  $E_0$  как на множестве меры нуль. Следовательно,  $f(x)$  измерима и на  $E = (E \setminus E_0) \cup E_0$ .

## 5. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.

**Определение 4.** Пусть функции  $f_n(x)$ ,  $n=1,2,3,\dots$ , и  $f(x)$  измеримы на  $E$  и принимают почти всюду на  $E$  конечные значения. Говорят, что последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  по мере на  $E$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} (E[|f_n - f| \geq \varepsilon]) = 0$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $\delta > 0$  существует номер  $N = N(\varepsilon, \delta)$  такой, что для всех номеров  $n \geq N$  справедливо равенство  $E[|f_n - f| \geq \varepsilon] < \delta$ .

**Теорема 4.** Если  $\{f_n(x)\}$  - последовательность измеримых на  $E$  функций, сходится почти всюду на  $E$  к функции  $f(x)$ , то  $f(x)$  измерима на  $E$ .

**Доказательство.** Если  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  всюду на  $E$ , то теорема 4 есть следствие теоремы 3. Если  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  всюду на  $E$  кроме множества  $E_0$  меры нуль, то  $f(x)$  измерима на  $E \setminus E_0$  по теореме 3 и измерима на  $E_0$  как на множестве меры нуль. Следовательно,  $f(x)$  измерима и на  $E = (E \setminus E_0) \cup E_0$ .

**Теорема 5 (теорема Лебега).** Пусть  $E$  - измеримое множество конечной меры и пусть функции  $f_n(x)$  и  $f(x)$  измеримы на  $E$  и почти всюду конечны. Тогда из сходимости последовательности  $\{f_n(x)\}$  к  $f(x)$  почти всюду на  $E$  следует сходимость  $\{f_n(x)\}$  к  $f(x)$  по мере.

**Доказательство.** Положим  $A = E[|f| = +\infty]$ ,  $A_n = E[|f_n| = +\infty]$ ,  $B = E \setminus E[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f]$ ,  $C = A \cup B \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ . Тогда по условию теоремы  $|C| = 0$  и всюду вне  $C$  последовательность  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  и все функции  $f(x)$  и  $f_n(x)$  принимают конечные значения. Для любого  $\varepsilon > 0$  положим  $E_n = E[|f_n - f| \geq \varepsilon]$ ,  $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ . Так как  $E_n \subset R_n$ , то  $|E_n| \leq |R_n|$  и для доказательства теоремы достаточно доказать, что  $|R_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Обозначим  $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$  и покажем, что  $|R_n| \rightarrow |R|$  при  $n \rightarrow \infty$ . По построению  $R_{n+1} \subset R_n$  для любого номера  $n$  и поэтому  $R_n \setminus R = \bigcup_{k=n}^{\infty} (R_k \setminus R_{k+1})$ , причём множества под знаком объединения не пересекаются. Тогда по теореме 7 из §2:  $|R_n \setminus R| = \sum_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|$  и в силу сходимости ряда  $|R_1 \setminus R| = \sum_{k=1}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}|$  его остаток стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.  $|R_n \setminus R| \rightarrow 0$  и из равенства  $|R_n| = |R_n \setminus R| + |R|$  следует  $|R_n| \rightarrow |R|$ . Для доказательства теоремы достаточно показать  $|R| = 0$ , а для этого достаточно доказать, что  $R \subset C$ .

Пусть  $x_0$  - любая точка и  $x_0 \notin C$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N = N(x_0, \varepsilon)$  такой, что  $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$  при  $n \geq N$ , т.е. при  $n \geq N$  точка  $x_0 \notin E_n$ , а, значит,  $x_0 \notin R_n$  и  $x_0 \notin R$ . Вложение  $R \subset C$  установлено, а поэтому и доказана теорема.

---

**6. теорема Рисса. Эквивалентность функций являющихся пределами по мере одной последовательности измеримых функций.**

**Теорема 6 (теорема Рисса).** Пусть  $E$  - измеримое множество конечной меры и пусть функции  $f_n(x)$  и  $f(x)$  - измеримы и почти всюду конечны на  $E$ , то из последовательности  $\{f_n(x)\}$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к  $f(x)$  почти всюду на  $E$ .

**Доказательство.** Не ограничивая общности считаем, что  $f(x)$  и  $f_n(x)$  принимают конечные значения всюду на  $E$  (в противном случае, как и в теореме 5 рассмотрим множество  $E/A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ ). Так как  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  по мере на  $E$ , то для любого номера  $k$  найдётся номер  $n_k$  такой, что

$$\text{для меры множества } E_k = E \left[ \left| f_{n_k} - f \right| \geq \frac{1}{k} \right] \text{ выполняется неравенство } |E_k| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Положим как и в теореме 5  $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ ,  $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ . Тогда в силу свойств внешней меры:

$$|R_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |E_k| \Rightarrow |R_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow |R_n| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \text{ Далее, как и в теореме 5 докажем,}$$

что  $|R_n| \rightarrow |R|$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.  $|R| = 0$ . Остаётся доказать сходимость  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  при

$n_k \rightarrow \infty$  всюду вне множества  $R$ . Пусть  $x_0$  - любая точка множества  $E \setminus R = E \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ , тогда

$x_0 \notin R_n$  при некотором  $N = N(x_0)$ . Но это значит, что  $x_0 \notin E_k$  при  $k \geq N(x_0)$ , т.е.

$|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{k}$  при  $k \geq N$ . Следовательно, последовательность  $f_{n_k}(x_0) \rightarrow f(x_0)$  и теорема доказана.

**Теорема 7.** Пусть  $E$  - множество конечной меры и пусть функции  $f_n(x)$ ,  $f(x)$  и  $g(x)$  почти всюду конечны. Тогда, если  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  и  $f_n(x) - g(x)$  по мере одновременно, то  $f(x) \sim g(x)$ .

**Доказательство.** Очевидно, что при любом  $\varepsilon > 0$  выполняется включение  $E[|f - g| \geq \varepsilon] \subset E\left[|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup E\left[|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right]$ , отсюда при  $n \rightarrow \infty$  мера правой части, а, значит, и левой стремится к нулю, т.е.  $E[|f - g| \geq \varepsilon] = 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ . В итоге  $f(x) \sim g(x)$  на  $E$ , ибо  $E[f \neq g] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[|f - g| \geq \frac{1}{n}\right]$ , а мера правой части равна нулю.

**Теорема 8 (теорема Егорова).** Пусть  $E$  - измеримое множество конечной меры и пусть  $f_n(x)$  и  $f(x)$  измеримы, почти всюду конечны на  $E$ , а последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится почти всюду к  $f(x)$  на  $E$ . Тогда для любого  $\delta > 0$  существует измеримое множество  $E_\delta \subset E$  такое, что  $|E_\delta| > |E| - \delta$ , на  $E_\delta$  последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x)$  равномерно.

**Теорема 9 (теорема Лузина).** Пусть  $f(x)$  - измерима и почти всюду конечна на измеримом множестве  $E$ . Тогда для любого  $\delta > 0$  существует непрерывная функция  $\varphi(x)$  такая, что  $|E[f \neq \varphi]| < \delta$ . Если, в частности,  $|f(x)| \leq k$ , то и  $|\varphi(x)| \leq k$ .

**Теорема.** Предел  $f(x)$  сходящейся при каждом  $x \in X$  последовательности  $f_n(x)$  измеримых функций измерим.

## 8. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.

Пусть  $E$  – измеримое множество и  $|E| < +\infty$ . Назовём разбиением  $E$  любое семейство  $T = \{E_k\}_{k=1}^n = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  конечного числа измеримых, попарно не пересекающихся множеств и таких, что  $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ .

Пусть  $f(x)$  – произвольная ограниченная на множестве  $E$  функция. Для любого разбиения  $T$  обозначим  $M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), m_k = \inf_{x \in E_k} f(x)$  и рассмотрим суммы  $S_T = \sum_{k=1}^n M_k |E_k|, s_T = \sum_{k=1}^n m_k |E_k|$ , которые называются верхней и нижней суммами Лебега разбиения  $T$ . Ясно, что  $s_T \leq S_T$  и эти суммы ограничены. Поэтому существуют  $\bar{I} = \inf_T S_T$  и  $\underline{I} = \sup_T s_T$ , называемые верхним и нижним интегралами Лебега функции соответственно.

**Определение 1.** Ограниченная на множестве конечной меры  $E$  функция  $f(x)$  называется интегрируемой (по Лебегу) на  $E$ , если  $\bar{I} = \underline{I}$ , т.е. её верхний и нижний интеграл Лебега совпадают. Общее значение  $I = \bar{I} = \underline{I}$  называется интегралом Лебега от  $f(x)$  по множеству  $E$  и обозначается  $I = \int_E f(x) dx$ .

**Теорема 1.** Всякая интегрируемая по Риману функция  $f(x)$  является интегрируемой по Лебегу, причём её интегралы Римана и Лебега совпадают.

**Доказательство:** Пусть  $f(x)$  интегрируема по Риману на  $E = [a, b]$ , а, значит, является ограниченной. Тогда, поскольку любое разбиение отрезка  $[a, b]$  на частичные сегменты (по Риману) включается в класс разбиений множества  $E$  (по Лебегу), имеют место неравенства:  $\underline{I}_R \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{I}_R$ . Так как  $f(x)$  интегрируема по Риману, то  $\bar{I}_R = \underline{I}_R$ , откуда следует равенство  $\underline{I} = \bar{I}$ , то есть  $f(x)$  интегрируема по Лебегу и интегралы Римана и Лебега совпадают.

**Теорема 2.** Всякая ограниченная и измеримая на измеримом множестве конечной меры функция интегрируема на нём по Лебегу.

**Доказательство:** Построим специальное лебеговское разбиение множества  $E$ . Пусть  $m = \inf_E f(x), M = \sup_E f(x)$ . Разобьём отрезок  $[m, M]$  точками  $m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$  и положим  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta y_k, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ .

Лебеговским разбиением множества  $E$  назовём разбиение  $T = \{E_k\}_{k=1}^n, E_1 = E[y_0 \leq f(x) \leq y_1], E_k = E[y_{k-1} < f(x) \leq y_k], k = 2, 3, \dots, n$ .

Все множества  $E_k$  измеримы, так как функция  $f(x)$  измерима. Пусть  $s_T \leq S_T$  – нижняя и верхние суммы, отвечающие разбиению  $T$ . Для любого номера  $k$  имеют место неравенства  $y_{k-1} \leq m_k \leq M_k \leq y_k$ , где  $m_k = \inf_{E_k} f(x), M_k = \sup_{E_k} f(x)$ . Умножая это тройное

неравенство на  $|E_k|$  и суммируя по  $k$ , получим  $\sum_{k=1}^n y_{k-1} |E_k| \leq s_T \leq S_T \leq \sum_{k=1}^n y_k |E_k|$ . Отсюда

$0 \leq S_T - s_T \leq \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) |E_k|$ , а так как для любого разбиения  $T$ :  $s_T \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_T$ , то

$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \delta(E)$ . Из последней оценки в силу возможности выбора произвольного положительного числа  $\delta$  получаем равенство  $\underline{I} = \bar{I}$ . Теорема доказана.

I.  $\int_E 1 dx = |E|$  Если  $f(x) \equiv 1$  на  $E$ , то  $s_T = S_T = |E|$ .

II. Если  $f(x)$  ограничена, интегрируема на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ , и  $\alpha$  любое действительное число, то функция  $\alpha f(x)$  также интегрируема на  $E$  и  $\int_E \alpha f(x) dx = \alpha \int_E f(x) dx$ .

III. Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  ограничены и интегрируемы на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ , то их сумма интегрируема на множестве  $E$  и  $\int_E (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_E f_1(x) dx + \int_E f_2(x) dx$ . Из свойств

II и III вытекает линейное свойство интеграла Лебега:  $\int_E (\alpha f_1 + \beta f_2) dx = \alpha \int_E f_1 dx + \beta \int_E f_2 dx$ .

IV. Если  $f(x)$  ограничена и интегрируема на каждом из непересекающихся множеств конечной меры  $E_1$  и  $E_2$ , то  $f(x)$  интегрируема и на  $E = E_1 \cup E_2$  и  $\int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx$ . Это утверждение следует из того, что любое разбиение  $T$  множества  $E$  распадается на разбиение  $T_1$  и  $T_2$  для множеств  $E_1$  и  $E_2$ , а объединение любых двух разбиений множеств  $E_1$  и  $E_2$  является разбиением множества  $E$ .

V. Если функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  ограничены и интегрируемы на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ , и  $f_1(x) \geq f_2(x)$  всюду (почти всюду) на  $E$ , то  $\int_E f_1(x) dx \geq \int_E f_2(x) dx$ . Так как все нижние суммы функции  $F = f_1(x) - f_2(x)$  неотрицательные, то  $\underline{I} \geq 0$ .

## 9. Свойства интеграла Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости.

Пусть  $f(x) \geq 0$  всюду на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ ,  $f(x)$  - измерима и, возможно, неограничена. Для любого числа  $N > 0$  положим  $f_N(x) = \min\{N, f(x)\}$  - срезка функции  $f(x)$ . Функция  $f_N(x)$  также измерима на  $E$ :

$$E[f_N > a] = \begin{cases} E[f > a], & \text{при } a < N \\ \emptyset, & \text{при } a \geq N \end{cases}$$

Причём срезка  $f_N(x)$  - ограничена. В силу теоремы 1 из п.1 этого параграфа существует интеграл  $I_N(f) = \int_E f_N(x) dx$ .

**Определение 2.** Если при  $N \rightarrow \infty$  существует  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(f) < +\infty$ , то  $f(x)$  называется суммируемой на множестве  $E$ , а этот предел называется интегралом от  $f(x)$  на  $E$  и обозначается  $\int_E f(x) dx = I(f)$ .

**Теорема 3 (полная аддитивность интервала Лебега).** Пусть  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $|E| < +\infty$ ,  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , все множества  $E_k$  - измеримы. Тогда 1) если  $f(x) \geq 0$  и  $f(x)$  суммируема на  $E$ , то  $f(x)$  суммируема на  $E_k$ , причем

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx; \quad (*)$$

2) если  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x)$  суммируема на всех множествах  $E_k$  и ряд в формуле (\*) сходится, то  $f(x)$  суммируема на  $E$  и справедливо равенство (\*).

**Доказательство:** Сначала докажем утверждения (1) и (2) для неотрицательной ограниченной функции  $f(x)$ . Пусть  $0 \leq f(x) \leq M$ . Положим  $R_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k$ ;  $|R_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\int_E f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f(x) dx = \int_{R_n} f(x) dx \leq M \int_{R_n} dx = M |R_n| \rightarrow 0$ , т.е. случай ограниченной функции  $f(x)$  рассмотрен.

Пусть  $f(x) \geq 0$  - любая суммируемая и неограниченная функция на множестве  $E$ . В силу неравенства  $\int_{E_k} f dx \leq \int_E f dx$  следует суммируемость на  $E_k$ . Остается доказать равенство (\*). Из неравенства  $f_N(x) \leq f(x)$  вытекает оценка (в силу справедливости теоремы для случая ограниченной функции)

$$\int_E f_N(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} f_N(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} f(x) dx. \quad (**)$$

Переходя здесь к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получим  $\int_E f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx$ . С другой

стороны, для любого натурального числа  $m$   $\int_E f_N dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f_N dx \geq \sum_{k=1}^m \int_{E_k} f_N dx$ . Устремив

$N \rightarrow \infty$ , а затем  $m \rightarrow \infty$ , получим  $\int_E f(x)dx \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx$ , что и доказывает справедливость равенства (\*). Для доказательства утверждения 2) достаточно обосновать суммируемость  $f(x)$  на  $E$ , ибо формула (\*) уже доказана. Но суммируемость функции  $f(x)$  на  $E$  сразу следует из неравенства (\*\*) и из сходимости ряда в правой части.

**Теорема 4 (абсолютная непрерывность интервала Лебега).** Если  $f(x) \geq 0$  и суммируема на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что каково бы ни было измеримое подмножество  $e \subset E$  с мерой  $|e| < \delta$  справедливо неравенство  $\int_e f(x)dx < \varepsilon$ .

**Доказательство:** Так как  $f(x)$  - суммируема на  $E$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $N$ , при котором выполняется неравенство  $\int_E [f(x) - f_N(x)]dx < \frac{\varepsilon}{2}$ . Поэтому, в силу  $f_N(x) \leq N$  справедливы соотношения  $\int_e f(x)dx = \int_e [f(x) - f_N(x)]dx + \int_e f_N(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} + N|e| = \varepsilon$  при  $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ .

**Теорема 6 (мажорантный признак).** Если  $f_1(x) \geq 0$  - измерима на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ ,  $f_2(x)$  - суммируема на  $E$  и, если всюду на  $E$  выполняется неравенство  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , то  $f_1(x)$  - суммируема на  $E$  и справедлива оценка  $\int_E f_1(x)dx \leq \int_E f_2(x)dx$ . Не а, а х

**Доказательство:** Справедливость теоремы следует из соотношения  $\int_E f_{1N}(x)dx \leq \int_E f_{2N}(x)dx \leq \int_E f_2(x)dx$ . Не а, а х

# 10. Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть  $|E| < +\infty$ ,  $f(x)$  - измеримая функция на  $E$ . Введём в рассмотрение две функции  $f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$  и  $f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$ , которые также измеримы на  $E$ . Справедливы равенства  $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$ ,  $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ .

**Определение 3.** Измеримая функция  $f(x)$  называется суммируемой на  $E$ ,  $E < +\infty$ , если на  $E$  суммируемы обе неотрицательные функции  $f^+(x)$  и  $f^-(x)$ . При этом интегралом Лебега от  $f(x)$  называется разность  $\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$ .

Таким образом для интеграла Лебега (в отличие от несобственного интеграла Римана второго рода) суммируемость  $f(x)$  эквивалентна суммируемости функции  $|f(x)|$ .

**Замечание.** Теорема 3 о полной аддитивности интеграла Лебега справедлива и в случае произвольных суммируемых функций с изменением: во втором

утверждении надо требовать сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{E_k} f(x)dx \right|$ . Теорема 4 об абсолютной непрерывности интеграла верна, причём здесь утверждается выполнение неравенства  $\left| \int_E f(x)dx \right| < \varepsilon$ .

**Определение 4.** Совокупность всех суммируемых на измеримом множестве  $E$  функций обозначается  $L(E) \equiv L_1(E)$ . Говорят, что последовательность  $f_n(x) \in L(E)$  сходится в  $L(E)$  (сходится в среднем) к  $f(x) \in L(E)$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n(x) - f(x)|dx = 0$ .

Имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$  так как  $\left| \int_E f_n(x)dx - \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E |f_n(x) - f(x)|dx$ . Если  $\{f_n(x)\}$  сходится в  $L(E)$  к  $f(x) \in L(E)$ , то эта последовательность сходится к  $f(x)$  и по мере на  $E$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  обозначим  $E_n = E[|f - f_n| \geq \varepsilon]$ . Тогда  $\int_E |f_n - f|dx \geq \int_{E_n} |f_n - f|dx \geq \varepsilon |E_n|$  и, значит,  $|E_n| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Пусть  $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, 1/n] \\ 0, & x \in (1/n, 1) \end{cases}$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow 0$  по мере, но  $\int_E f_n(x)dx = 1$ . Однако, при дополнительном условии из сходимости по мере следует и сходимость в среднем.

**Теорема (Лебега пр перех).** Если последовательность  $\{f_n\}$  на  $A$  сходится к  $f$  и при всех  $n$   $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ , где  $\varphi$  интегрируема на  $A$ , то предельная функция  $f$  интегрируема на  $A$  и  $\int(A) f_n(x) d\mu \rightarrow \int(A) f(x) d\mu$ .

---

### 11. Свойства интеграла Лебега. Теорема Леви и следствие ее для рядов. Интегрируемость по Лебегу измеримой и ограниченной функции

Пусть  $|E| < +\infty$ ,  $f(x)$  - измеримая функция на  $E$ . Введём в рассмотрение две функции  $f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$  и  $f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$ , которые также измеримы на  $E$ . Справедливы равенства  $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$ ,  $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ .

**Определение 3.** Измеримая функция  $f(x)$  называется суммируемой на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ , если на  $E$  суммируемы обе неотрицательные функции  $f^+(x)$  и  $f^-(x)$ . При этом интегралом Лебега от  $f(x)$  называется разность  $\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$ .

**Теорема 3 (полная аддитивность интервала Лебега).** Пусть  $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $|E| < +\infty$ ,  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ , все множества  $E_k$  - измеримы. Тогда 1) если  $f(x) \geq 0$  и  $f(x)$  суммируема на  $E$ , то  $f(x)$  суммируема на  $E_k$ , причем

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx; \quad (*)$$

2) если  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x)$  суммируема на всех множествах  $E_k$  и ряд с модулями в формуле (\*) сходится, то  $f(x)$  суммируема на  $E$  и справедливо равенство (\*).

**Теорема 4 (абсолютная непрерывность интервала Лебега).** Если  $f(x) \geq 0$  и суммируема на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что каково бы ни было измеримое подмножество  $e \subset E$  с мерой  $|e| < \delta$  справедливо неравенство по модулю  $\int_e f(x)dx < \varepsilon$ .

**Теорема 8 (теорема Леви).** Пусть  $f_n(x)$  - суммируемые на множестве  $E$  функции,  $|E| < +\infty$ , и пусть для любого натурального числа  $n$  выполняется неравенство  $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  для почти всех  $x \in E$ . Если существует постоянная  $M$  такая, что для любого натурального числа  $n$  выполняется неравенство  $\left| \int_E f_n(x)dx \right| \leq M$ , то последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится почти всюду на  $E$  к некоторой функции  $f(x)$ , причем  $f_n(x) \in L(E)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$ .

**Доказательство:** Не ограничивая общности, считаем:  $f_n(x) \geq 0$  почти всюду на  $E$  ( $f_n \rightarrow g_n = f_n - f_1 \geq 0$ ). Так как  $\{f_n(x)\}$  не убывает почти всюду на  $E$ , то для почти всех  $x \in E$  определена предельная функция  $f(x)$ , которая в этих точках принимает конечные или бесконечные значения. Если мы докажем, что  $f(x)$  суммируема на  $E$ , то из этого будет следовать, что  $f(x)$  - почти всюду конечна на  $E$  и  $f_n(x) - f(x)$  по мере на  $E$  и в силу теоремы 5 из §3. Отсюда в силу неравенства  $f_n(x) \leq f(x)$  почти всюду на  $E$  и теоремы 7 получим равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$ . Таким образом, достаточно доказать суммируемость функции  $f(x)$  на множестве  $E$ .

Для любого  $N > 0$  последовательность  $\{f_{n,N}(x)\}$  сходится к  $f_N(x)$  почти всюду на  $E$ , причем ограниченная функция  $f_N(x)$  суммируема на  $E$  и для почти всех  $x \in E$  выполняется неравенство  $f_{n,N}(x) \leq f_N(x)$ . Применяя

теорему 7, получим  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_{n,N}(x) dx = \int_E f_N(x) dx$ . Отсюда и из неравенства  $\int_E f_n(x) dx \geq \int_E f_{n,N}(x) dx$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx \geq \int_E f_N(x) dx$ , а так как  $\int_E f_n(x) dx \leq M$  для всех  $n$ , то и  $\int_E f_N(x) dx \leq M$ . Из последнего неравенства и из неубывания интеграла в нём по  $N$  вытекает существование предела  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E f_N(x) dx$ , что и означает суммируемость  $f(x)$  на  $E$ .

**Следствие (для функциональных рядов).** Если все функции  $u_n(x) \geq 0$  почти всюду на  $E$ , суммируемы на  $E$  и если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) dx$ , то почти всюду на  $E$  сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , причем сумма  $S(x)$  ряда суммируема на  $E$  и  $\int_E S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) dx$ , т.е. ряд можно интегрировать почленно. Здесь в качестве  $f_n(x)$  берем частичную сумму  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ .

**Теорема 9 (Теорема Фату).** Если последовательность измеримых и суммируемых на  $E$ ,  $|E| < +\infty$ , сходится почти всюду на  $E$  к функции  $f(x)$  и если существует постоянная  $A$  такая, что для всех номеров  $n$  выполняется неравенство  $\int_E |f_n(x)| dx \leq A$ . То функция  $f(x)$  суммируема на  $E$  и справедливо неравенство  $\int_E |f(x)| dx \leq A$ .

**Доказательство.** Положим  $g_n(x) = \inf_{k \geq n} |f_k(x)|$  функции  $g_n(x)$  измеримы на  $E$  по теореме 3 из §3, последовательность  $\{g_n(x)\}$  не убывает и сходится к  $|f(x)|$  почти всюду на  $E$ . Кроме того  $g_n(x) \leq |f_n(x)|$ , поэтому в силу мажорантного признака каждая функция  $g_n(x)$  - суммируема на  $E$ . Применяя к последовательности  $\{g_n(x)\}$  теорему  $\int_E g_n(x) dx \leq \int_E |f_n(x)| dx \leq A$ , получим, что  $f(x)$  - суммируема на  $E$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n(x) dx = \int_E |f(x)| dx$ . Из последнего соотношения получается и неравенство  $\int_E |f_n(x)| dx \leq A$ . Теорема доказана.

**Теорема 10 (теорема Лебега).** Для того, чтобы ограниченная на  $E$ ,  $|E| < +\infty$  функция  $f(x)$  являлась интегрируемой по Лебегу на  $E$  необходимо и достаточно, чтобы  $f(x)$  была измерима на  $E$ .

**Доказательство:** Достаточность доказана в теореме 2, докажем необходимость. Пусть  $f(x)$  ограничена и интегрируема на  $E$ , то есть  $\underline{I} = \bar{I}$ , следовательно, существует последовательность разбиений  $T_n = \{E_k^{(n)}\}$  множества  $E$  такая, что соответствующие подпоследовательности верхних и нижних сумм  $\{S_n\}$  и  $\{s_n\}$  удовлетворяют условию  $S_n - s_n < \frac{1}{n}$ , причём каждое разбиение  $T_n$  является измельчением разбиения  $T_{n-1}$ . По определению  $S_n = \sum_k M_k^{(n)} |E_k^{(n)}|$ ,  $s_n = \sum_k m_k^{(n)} |E_k^{(n)}|$ , где  $M_k^{(n)}$  и  $m_k^{(n)}$  - точные грани на  $E_k^{(n)}$  функции  $f(x)$ . Введём в рассмотрение фундаментальные последовательности  $\{\overline{f_n}(x)\}$  и  $\{\underline{f_n}(x)\}$ , положив  $\overline{f_n}(x) = M_k^{(n)}$  на  $E_k^{(n)}$ ,  $\underline{f_n}(x) = m_k^{(n)}$  на  $E_k^{(n)}$ .

Ясно, что функции  $\overline{f_n}(x)$  и  $\underline{f_n}(x)$  – измеримы на  $E$ , причём последовательность  $\{\underline{f_n}(x)\}$  не убывает, а  $\{\overline{f_n}(x)\}$  – не возрастает. Также выполняется двустороннее неравенство  $\underline{f_n}(x) \leq f(x) \leq \overline{f_n}(x)$ .

Положим  $\overline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n}(x)$  и  $\underline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{f_n}(x)$ .

По теореме 8:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)] dx = \int_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)] dx$ .

Из определений  $\overline{f_n}(x)$  и  $\underline{f_n}(x)$  вытекает равенство

$\int_E [\overline{f_n}(x) - \underline{f_n}(x)] dx = S_n - s_n$ . Из последних двух соотношений получаем

$\int_E [\overline{f}(x) - \underline{f}(x)] dx = 0$  и, так как  $\overline{f}(x) - \underline{f}(x) \geq 0$  по теореме 5,  $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$  почти всюду на  $E$ , а, значит, и  $\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$  почти всюду на  $E$ . В силу измеримости функций  $\overline{f}(x)$  и  $\underline{f}(x)$ , измерима и функция  $f(x)$ . Теорема доказана.

## 12. Теорема Фубини. Интеграл Лебега для множества бесконечной меры.

**Определение.** Множество  $Z$  упорядоченных конечных последовательностей  $(x_1, \dots, x_n)$   $x_k$  принадлежит  $X_k$  называется прямым произведением множеств  $X_1, \dots, X_n$

**Теорема Фубини.** Пусть меры  $\mu_x$  и  $\mu_y$ , определены на  $\sigma$ -алгебрах,  $\sigma$ -аддитивны и полны; пусть далее,  $\mu = \mu_x \times \mu_y$  и функция  $f(x, y)$  интегрируема по мере  $\mu$  на множестве  $A \subset X \times Y$ .

Тогда  $\int_A f(x, y) d\mu = \int(X) \left( \int(A_x) f(x, y) d\mu_y \right) d\mu_x = \int(Y) \left( \int(A_y) f(x, y) d\mu_x \right) d\mu_y$

**Определение.** (Интеграл Лебега на мн-ве бескон. меры) Искрывающая последовательность- монотонно возрастающая последовательность  $\{X_n\}$  измеримых подмножеств  $X$  такая что  $X = \bigcup X_n$ ,  $\mu(X_n) < \infty$ .

Измеримая ф-я  $f$ , определенная на мн-ве  $X$  с  $\sigma$ -конечной мерой  $\mu$ , называется суммируемой на  $X$ , если она суммируема на каждом измеримом подмножестве  $A \subset X$  Конечной меры и если для каждой исчерпывающей последовательности  $\{X_n\}$  предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int(X_n) f(x) d\mu$  существует и не зависит от выбора этой последовательности.

**Теорема 1 (теорема Фубини).** Пусть функция  $f(x, y)$  интегрируема на  $\Pi = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . Тогда для почти всех  $y \in [c, d]$  существует  $\int_a^b f(x, y) dx$ , для почти всех  $x \in [a, b]$  существует  $\int_c^d f(x, y) dy$  и

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

**Замечание.** Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример — функция  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{вне нуля} \\ 0 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$  на множестве  $K = [-1; 1] \times [-1; 1]$ .

### 13. Классы $L_{p,p>1}$ . Неравенства Гёльдера и Минковского.

Пусть  $E$  - измеримое множество, число  $p \geq 1$

**Определение 1.** Множество всех измеримых на  $E$  функций  $f(x)$ , для которых функции  $|f(x)|^p$  суммируемы на  $E$ , называется пространством  $L_p(E)$ .

Норма в пространстве  $L_p(E)$  вводится по формуле  $\|f(x)\|_{L_p(E)} = \|f(x)\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ .

Если  $\|f(x)\|_p = 0$ , то  $f(x) \sim 0$ , поэтому в этом пространстве элементы считаются равными, если они эквивалентны. Остается проверить аксиому треугольника для таким образом введенной нормы. В случае  $p = 1$  это очевидно, в случае  $p > 1$  сначала докажем неравенство Гёльдера, а затем неравенство Минковского.

**Опр.** Если  $p > 1$ , число  $q$  связано с числом  $p$  по формуле

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f(x) \in L_p(E), g(x) \in L_p(E)$ , то функция  $f(x)g(x)$  суммируема на  $E$  и

справедливо неравенство Гёльдера.  $\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \|f(x)\|_{L_p(E)} \|g(x)\|_{L_p(E)}$ .

Для доказательства введем в рассмотрение на множестве  $x > 0$  функцию  $\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x, \alpha \in (0,1)$ . Производная  $\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$  функции  $\varphi(x)$  больше нуля при  $x \in (0,1)$  и меньше нуля при  $x > 1$ . Следовательно, функция  $\varphi(x)$  достигает максимума при  $x = 1$ . Запишем неравенство  $\varphi(x) \leq \varphi(1)$  в виде  $x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha$  и положим  $x = \frac{a}{b}$ , где  $a \geq 0, b \geq 0$ . Получим соотношение

$a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$ , справедливо для всех чисел  $a \geq 0, b \geq 0$ . Если  $\alpha = \frac{1}{p}$ , то

$1 - \alpha = \frac{1}{q}$ ; В результате выведем неравенство Юнга  $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ .

В случаях  $f(x) \sim 0$  или  $g(x) \sim 0$  неравенство Гёльдера очевидно. Пусть  $f(x) \not\sim 0, g(x) \not\sim 0$ , положим  $a = \frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|_p^p}, b = \frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|_q^q}$ . В результате неравенство Юнга примет вид

$$|f(x)g(x)| \leq \|f(x)\|_p \|g(x)\|_q \left( \frac{|f(x)|^p}{p\|f(x)\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g(x)\|_q^q} \right).$$

Правая часть соотношения суммируема на множестве  $E$ , поэтому в силу мажорантного признака суммируема на  $E$  и левая часть, то есть функция  $f(x)g(x)$ . Интеграл от функции, стоящий в скобках в правой части, равен единице. В итоге неравенство Гёльдера доказано.

**Опр.** Если  $p \geq 1, f(x), g(x) \in L_p(E)$ , то функция  $|f(x) + g(x)|^p$  суммируема на множестве  $E$  и справедливо неравенство Минковского  $\|f(x) + g(x)\|_{L_p(E)} \leq \|f(x)\|_{L_p(E)} + \|g(x)\|_{L_p(E)}$ .

**Доказательство.** Заметим, что

$$|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p) \Rightarrow f + g \in L_p(E) \Rightarrow |f + g|^{\frac{p}{q}} \in L_q(E).$$

Поэтому в силу неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} \int_E |f| |f + g|^{\frac{p}{q}} dx &\leq \|f\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \\ \int_E |g| |f + g|^{\frac{p}{q}} dx &\leq \|g\|_p \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Сложим эти два неравенства:

$$\begin{aligned} \int_E |f + g|^p dx &= \int_E |f + g| |f + g|^{p-1} dx \leq \\ &\leq \int_E (|f| + |g|) |f + g|^{\frac{p}{q}} dx \leq \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Поделив это неравенство на  $\|f + g\|_p^{\frac{p}{q}}$ , получим требуемое неравенство.

#### 14. Полнота пространства $L_p$ .

Последовательность  $\{f_n\}$  элементов нормированного пространства называется фундаментальной, если числовая последовательность  $\|f_m - f_n\|$  стремится к нулю при  $m, n \rightarrow \infty$ . Последовательность  $\{f_n\}$  элементов нормированного пространства называется сходящейся, если в этом пространстве существует элемент  $f$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$ .

**Определение 2.** Нормированное пространство называется полным (банаховым), если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве является сходящейся.

**Теорема 1.** Пространство  $L_p(E)$ ,  $|E| < +\infty$ ,  $p \geq 1$ , является полным (банаховым) пространством.

**Доказательство.** Пусть  $\{f_n(x)\}$  - произвольная фундаментальная последовательность в  $L_p(E)$ . Для любого натурального числа  $k$  существует номер  $n_k$  такой, что для всех  $m \geq n_k, n \geq n_k$  выполняется неравенство  $\|f_m^{(x)} - f_n^{(x)}\| < \frac{1}{2^k}$ . Можно считать, что  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , тогда  $\|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\| < \frac{1}{2^k}$ . В силу неравенства Гельдера:

$$\int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx \leq \|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\|_p \left\{ \int_E 1^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{2^k} |E|^{1/q}.$$

Из этого соответствия следует оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| dx \leq |E|^{1/q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = |E|^{1/q}, \text{ которая по теореме 8(Б.Леви) из §4}$$

гарантирует сходимость почти всюду на  $E$  ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$  и тем более ряда

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)].$$

Но это означает, что какая то частичная сумма этого ряда, равна  $f_{n_{k+1}}(x)$  сходится почти всюду на  $E$  к некоторой функции  $f(x)$ . Далее, для любых  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для всех номеров  $m \geq N, n_k \geq N$  выполняется неравенство  $\|f_m(x) - f_{n_k}(x)\|_p < \varepsilon$ , а поскольку последовательность  $[f_m(x) - f_{n_k}(x)]$  сходится почти всюду на  $E$  к функции  $[f_m(x) - f(x)]$  при  $k \rightarrow \infty$ , то по теореме 9(Фату) из §4  $[f_m(x) - f(x)] \in L_p(x)$  и выполняется неравенство  $\|f_m(x) - f(x)\|_p \leq \varepsilon$  для всех  $m \geq N$ . Отсюда в силу неравенства Минковского следует принадлежность функции  $f(x)$  пространству  $L_p(E)$  и сходимость последовательности  $\{f_n(x)\}$  к функции  $f(x)$  в метрике  $L_p(E)$ . Теорема доказана.

Измеримая функция  $F(x)$  на измеримом множестве  $E$  называется простой, если она принимает  $f(x) = C_k$ , если  $x \in E_k$ , причем  $C_k$  может быть равным  $\pm \infty$ . Характеристической функцией множества  $E$  называется функция  $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \notin E \end{cases}$ .

Очевидно, что всякая простая функция  $f(x)$  имеет вид  $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \chi_{E_k}(x)$ , причем в этой сумме при каждом  $x$  отличном от нуля лишь одно слагаемое. Ясно, что функция  $\chi_E(x)$  измерима тогда и только тогда, когда множество  $E$  измеримо.

**Лемма 1.** Для любой на измеримом множестве  $E$  неотрицательной  $f(x)$  существует неубывающая последовательность  $\{f_n(x)\}$  простых неотрицательных функций  $f_n(x)$  таких,

что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  в каждой точке  $x$  множества  $E$ , причем сходимость равномерная на множестве конечных значений функции  $f(x)$ .

**Доказательство.** Введем в рассмотрение множество  $E_k^{(n)} = E \left[ \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right]$ ,

$n = 1, 2, \dots$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $E_0 = E[f(x) = +\infty]$ . Ясно, что при любом натуральном  $n$  множество  $E$  представимо в виде объединения попарно не пересекающихся множеств  $E = \left\{ \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k^{(n)} \right\} \cup E_0$ . Определим  $f_n(x)$  следующим образом:  $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ , если  $x \in E_k^{(n)}$ , если  $f_n(x) = f(x)$  на  $E_0$ . При переходе от  $n$  к  $(n+1)$  множество  $E_k^{(n)} = E_{2k}^{(n+1)} \cup E_{2k+1}^{(n+1)}$ , так как  $\left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) = \left[ \frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[ \frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right)$ . На множестве  $E_{2k}^{(n+1)}$  выполняется равенство  $f_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = f_n(x)$ , а на  $E_{2k+1}^{(n+1)}$ :  $f_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = f_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} > f_n(x)$ . Кроме этого справедливо соответствие  $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$  для всех точек  $x \in E \setminus E_0$ . Лемма доказана.

**Следствие.** Последовательность  $\{g_n(x)\}$ , в которой функции  $g_n(x)$  определяются по формуле  $g_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & f_n(x) \leq n, \\ n, & f_n(x) > n, \end{cases}$  обладает свойством:  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x)$  для любой точки  $x \in E$ ,  $g_n(x) = \sum_{k=1}^{m(n)} C_k \chi_{E_k}(x)$ , по равномерной сходимости на  $E \setminus E_0$  может и не быть.

## 15. Плотность множества непрерывных функций в $L_p$ . Непрерывность в метрике $L_p$ .

**Лемма 1.** Для любой на измеримом множестве  $E$  неотрицательной  $f(x)$  существует неубывающая последовательность  $\{f_n(x)\}$  простых неотрицательных функций  $f_n(x)$  таких, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  в каждой точке  $x$  множества  $E$ , причем сходимость равномерная на множестве конечных значений функции  $f(x)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $E$ -ограниченное измеримое множество,  $p \geq 1$ . Тогда пространство непрерывных на  $E$  функций  $C(E)$  плотно в  $L_p(E)$ .

**Доказательство.** Необходимо доказать, что для любой функции  $f(x) \in L_p(E)$  и для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется непрерывная на  $E$  функция  $\varphi(x)$  такая, что  $\|f(x) - \varphi(x)\|_p < \varepsilon$ . Так как  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ , то теорему достаточно доказать для случая  $f_n(x) \geq 0$ . Принадлежность  $f(x)$  классу  $L_p(E)$  означает, что функция  $f(x)$  почти всюду конечна на  $E$  и множеством  $E_0 = E[f(x) = +\infty]$  можно пренебречь. В силу следствия к лемме 1 существует неубывающая последовательность  $\{f_n(x)\}$  простых неотрицательных функций  $f_n(x)$  превращающих каждое число значение такое, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \in L_p(E)$ . Поэтому согласно теореме 8(Б. Леви) из §4 для любого  $\varepsilon > 0$  найдется номер  $N$  такой, что для всех  $n \geq N$  выполняется равенство  $\|f_n(x) - f(x)\|_p < \varepsilon$ . Таким образом достаточно установить существование функции  $\varphi(x) \in C(E)$ , удовлетворяющий для любого  $\varepsilon > 0$  неравенству

$$\|f_N(x) - \varphi(x)\|_p < \varepsilon, \quad \text{для} \quad f_N(x) = \sum_{k=1}^m C_k \chi_{E_k}(x) \text{ - произвольная простая функция,}$$

принимаяющая конечное число значений.

Для каждого множества  $E_k$  существует, содержащийся в нем замкнутое множества  $F_k$ , и такое, что  $|E_k \setminus F_k| < \varepsilon_k^p$ , где  $\varepsilon_k$  -любое положительное число. При этом выполняется соотношение  $\|\chi_{E_k}(x) - \chi_{F_k}(x)\|_p = |E_k \setminus F_k|^{1/p} < \varepsilon_k$ . Обозначим через  $r_k(x) = \rho(x, F_k)$  -функцию расстояния от точки  $x \in E$  до множества  $F_k$ . Ясно, что функция  $r_k(x)$  является непрерывной на  $E$ . Характеристическую функцию множества  $F_k$  можно представить в виде  $\chi_{F_k}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_k^{(n)}$

$$\text{где } \varphi_k^{(n)} = \frac{1}{1 + nr_k(x)} = \begin{cases} 1, & x \in F_k \\ \frac{1}{1 + nr_k(x)}, & x \notin F_k \end{cases}. \text{ Последовательность } \{\varphi_k^{(n)}(x)\} \text{ не возрастает с номером}$$

$n$ , причем справедливо соотношение  $|\chi_{F_k}(x) - \varphi_k^{(n)}| \leq 1$ , и в силу теоремы 8(Б. Леви) из §4 будет выполняться неравенство  $\|\chi_{F_k}(x) - \varphi_k^{(n)}\|_p < \varepsilon_k$ , если  $n$  - велико. Заметим, что все  $\varphi_k^{(n)}(x)$  непрерывны на  $E$  и даже во всем  $R_n$ .

Далее, определим функцию  $\varphi(x) = \sum_{k=1}^m C_k \varphi_k^{(n)}(x)$  справедливо цепочка неравенств:

$$\|f_N(x) - \varphi(x)\|_p \leq \sum_{k=1}^m |C_k| \left( \|\chi_{F_k}(x) - \varphi_k^{(n)}\|_p + \|\chi_{E_k}(x) - \chi_{F_k}(x)\|_p \right) \leq \sum_{k=1}^m 2|C_k| \varepsilon_k < \varepsilon, \text{ поэтому } \varepsilon_k \text{ достаточно}$$

выбрать из неравенства  $0 < \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2^{K+1} |C_k|^{-1}}$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** (Непрерывность в метрике  $L_p$ ). Пусть  $E$  - ограниченное измеримое множеств,  $p \geq 1$ . Тогда любая функция  $f(x) \in L_p(E)$  непрерывна в метрике  $L_p$ , то есть для

любого  $\varepsilon > 0$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что справедливо неравенство  $\|f(x+h) - f(x)\|_p < \varepsilon$ , если  $|h| < \delta$ , а функция  $f(x)$  считается продолженной нулем на все пространство  $R_n$ .

**Доказательство.** Пусть множество  $E$  содержится в шаре  $B_0(R)$  радиуса  $R$  с центром в точке  $x = 0$ . обозначим  $E_1 = B_0(R+1)$  и воспользуемся теоремой 2. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varphi(x) \in C(E_1)$  и даже по замечанию в тексте доказательства  $\varphi(x) \in C(\overline{E_1})$  такая, что  $\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E_1)} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Пусть  $|h| < \delta < 1$ , тогда при  $x \in E$  тоже  $x+h \in E_1$  и справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(E)} &< \|f(x+h) - \varphi(x+h)\|_{L_p(E)} + \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_{L_p(E)} + \|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E)} < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_{C(\overline{E})} |E|^{1/p} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Неравенство  $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_{C(\overline{E})} < \frac{\varepsilon |E|^{-1/p}}{3}$  при достаточно малых значениях  $h$  имеет место в силу равномерной непрерывности непрерывной на  $\overline{E_1}$  функции  $\varphi(x)$ . Теорема доказана.

## 16. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.

**Определение 1.** Множество  $M$  называется метрическим пространством, если каждой паре его элементов  $x$  и  $y$  поставлены в соответствии неотрицательное число  $\rho(x, y)$ , удовлетворяющее условиям:

- 1)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$  (аксиома тождества);
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии);
- 3)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (аксиома треугольника).

Число  $\rho(x, y)$  называется расстоянием между элементами  $x$  и  $y$ , а перечисленные три условия - аксиомами метрики. Любое множество можно сделать метрическим пространством, если ввести метрику по закону:  $\rho(x, y) = 0$ , если  $x = y$ ,  $\rho(x, y) = 1$ , если  $x \neq y$ .

**Определение 2.** последовательность  $\{x_n\}$  элементов метрического множества  $M$  называется фундаментальной, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$ .

Последовательность  $\{x_n\}$  элементов метрического множества  $M$  называется сходящейся, если существует  $x \in M$  и такой, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ . Если последовательность  $\{x_n\}$  точек множества пространства  $M$  сходится к точке  $x \in M$ , то и любая подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  последовательности  $\{x_n\}$  сходится к этой же точке. Фиксируем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Если  $\rho(x_n, x) < \varepsilon$  для  $n \geq N(\varepsilon)$ , то и  $\rho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$  для  $n_k \geq N(\varepsilon)$ .

Последовательность точек  $\{x_n\}$  метрического пространства  $M$  может сходиться не более, чем к одному пределу. Пусть  $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow y$ . Тогда

$$\rho(x, y) \leq \rho(x_n, x) + \rho(y, x_n) < \varepsilon$$

при любом  $\varepsilon > 0$  для достаточно больших номеров  $n$ , но это возможно лишь в случае  $\rho(x, y) = 0$ , то есть  $x = y$ .

Пусть дано множество  $X$  метрического пространства  $M$ . Точка  $a \in M$  называется *предельной точкой* этого множества, если любая окрестность точки  $a$  содержит хотя бы одну точку множества  $X \setminus \{a\}$ , то есть  $B(a, r) \cap [X \setminus \{a\}] \neq \emptyset$  для любого  $r$ . Множество, полученное присоединением к  $X$  всех его предельных точек, называется *замыканием* множества  $X$  и обозначается  $\overline{X}$ . Множество  $X$  называется *замкнутым*, если  $X = \overline{X}$ . Множество  $Y$  называется *открытым*, если его дополнение  $M \setminus Y$  замкнуто. Множество  $X$  называется *всюду плотным* в пространстве  $M$ , если  $\overline{X} = M$ . Множество  $X$  называется *нигде не плотным* в пространстве  $M$ , если каждый шар этого пространства содержит в себе шар, свободный от точек множества  $X$ .

**Определение 3.** Если в метрическом пространстве  $M$  каждая фундаментальная последовательность является сходящейся, то пространство  $M$  называется *полным*.

**Теорема 1(о вложенных шарах).** Пусть дана в полном метрическом пространстве  $M$  последовательность замкнутых шаров, вложенных друг в друга (то есть таких, что каждый последующий шар содержится внутри предыдущего), радиусы которых стремятся к нулю. Тогда существует и притом единственная точка, принадлежащая всем этим шарам.

**Доказательство.** Обозначим рассматриваемые шары следующим образом:

$$\overline{B}_1(a_1, \varepsilon_1), \overline{B}_2(a_2, \varepsilon_2), \dots, \overline{B}_n(a_n, \varepsilon_n), \dots$$

По условию теоремы

$$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \dots \supset \overline{B}_n \supset \dots$$

Рассмотрим последовательность центров этих шаров:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{n+p}, \dots$$

Так как  $\overline{B}_{n+p} \subset \overline{B}_n$ , то  $a_{n+p} \in \overline{B}_n(a_n, \varepsilon_n)$ . Поэтому  $\rho(a_{n+p}, a_n) \leq \varepsilon_n$ . Следовательно,  $\rho(a_{n+p}, a_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  независимо от номера  $p$ , т.е. последовательность центров сфер является фундаментальной.

В силу того, что пространство  $M$  - полное, эта последовательность сходится в некоторому пределу  $a \in M$ . Возьмем любой шар  $\overline{B}_k$ . Тогда точки  $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$  принадлежат этому шару. В силу замкнутости шара  $\overline{B}_k$  предельная точка  $a$  этой последовательности также принадлежит  $\overline{B}_k$ . Таким образом,  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  принадлежит всем шарам.

Допустим, что существует еще одна точка  $b$ , принадлежащая всем шарам и отличная от точки  $a$ , так, что  $\rho(a, b) = \delta > 0$ . Так как  $a$  и  $b \in \overline{B}_n$ , то

$$\delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, a_n) + \rho(a_n, b) \leq 2\varepsilon_n,$$

что невозможно, ибо  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Теорема доказана.

---

---

### 17. принцип сжатых отображений. Теорема Бэра о категориях.

**Теорема 3 (принцип сжатых отображений).** Пусть в полном метрическом пространстве  $M$  задан оператор  $A$ , переводящий элементы пространства  $M$  в элементы этого пространства. Пусть, кроме того,

$$\rho(A(x), A(y)) \leq \alpha \rho(x, y),$$

где  $\alpha < 1$ , а  $x$  и  $y$  - любые элементы  $M$ . Тогда существует и притом единственная точка  $x_0 \in M$  и такая, что  $A(x_0) = x_0$ . Эта точка называется неподвижной точкой оператора  $A$ , который, в свою очередь, называется сжатым (сжимающим) отображением.

**Определение 4.** Множество  $X$  называется множеством 1-ой категории, если она может быть представлено в виде суммы конечного или счетного числа нигде не плотных множеств. Множество, не являющееся множеством 1-ой категории, называется множеством второй категории.

**Теорема 2(Бэра о категориях).** Полное метрическое пространство есть множество 2-ой категории.

**Доказательство.** Предположим противное и допустим, что полное пространство  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ , где множества  $M_n$  нигде не плотны. Возьмем шар  $\bar{B}(a, 1)$  с центром в произвольной точке  $a$  и радиусом, равным единице. Так как  $M_1$  нигде не плотно, то внутри шара  $\bar{B}(a, 1)$  найдется шар  $\bar{B}(a_1, r_1)$  радиуса  $r_1 < 1$ , не содержащий точек множества  $M_1$ . Так как  $M_2$  нигде не плотно, то внутри шара  $\bar{B}(a_1, r_1)$  найдется шар  $\bar{B}(a_2, r_2)$  радиуса  $r_2 < \frac{1}{2}$ , не содержащий точек множества  $M_2$  и так далее.

Мы получили последовательность замкнутых шаров

$$\bar{B}_1(a_1, r_1), \bar{B}_2(a_2, r_2), \dots, \bar{B}_n(a_n, r_n), \dots,$$

каждый из которых вложен в предыдущий и радиусы которых стремятся к нулю. При этом шар  $\bar{B}(a_n, r_n)$  не содержит точек множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . По теореме 1 существует точка  $a_0 \in M$ , принадлежащая всем шарам. С другой стороны, эта точка  $a_0$  не принадлежит ни одному из множеств  $M_n$ , поэтому  $a_0 \notin M$ . Мы получили противоречие, которое и доказывает теорему.

Если рассмотреть числовую прямую  $R_1$  с обычной евклидовой нормой как метрическое пространство, то множество рациональных точек на  $R_1$  представляет собой множество 1-ой категории, а множество иррациональных точек является множеством 2-ой категории.

## 18. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.

**Определение 5.** Пусть  $X$  - линейное пространство над полем вещественных или комплексных чисел.  $X$  называется линейным нормированным пространством, если каждому его элементу  $x$  поставлено в соответствие вещественное число  $\|x\|$ , называемое нормой этого элемента, причем выполнены следующие аксиомы:

- 1)  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- 2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,  $\lambda$  - число из поля,
- 3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Сходимость последовательности  $\{x_n\}$  из линейного нормированного пространства отождествляется со сходимостью в метрике  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , причем полное линейное нормированное пространство называется банаховым.

**Примеры:**

1)  $R_n$  -  $n$ -мерное евклидово пространство, банахово пространство с нормой  $\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ , где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;

2)  $C[0,1]$  - пространство непрерывных на  $[0,1]$  функций с нормой  $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$ , отвечающий равномерной сходимости, поэтому  $C[0,1]$  также банахово пространство.

**Определение 6.** Линейное многообразие  $L$  линейного нормированного пространства  $X$  называется подпространством, если множество  $L$  замкнуто относительно сходимости по норме.

Отметим, что из  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  следует  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ , так как  $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$  в частности, если последовательность  $\{\|x_n\|\}$  - ограниченная числовая последовательность.

**Теорема 4 (теорема Рисса).** Пусть  $L$  - подпространство линейного пространства  $X$ ,  $L \neq X$ . Тогда для любого  $\varepsilon \in (0,1)$  существует элемент  $y \in X \setminus L$ ,  $\|y\| = 1$  и такой, что  $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$  для  $x \in L$ .

**Доказательство.** Фиксируем произвольный элемент  $y_0 \in X \setminus L$  и обозначим  $d = \inf_{x \in L} \|y_0 - x\|$ . Тогда  $d > 0$ , ибо если  $d = 0$ , то  $y_0 = \lim_{x_n \in L} x_n$  и  $y_0 \in L$  (в силу замкнутости  $L$ ), что невозможно. Для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $x_0 \in L$  такой, что  $d \leq \|y_0 - x_0\| < d + d\varepsilon$ .

Положим  $y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$ ;  $y_0 \notin L$ , так как в противном случае  $y_0 \in L$ , что невозможно,  $\|y\| = 1$ .

Далее,  $\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + x\|y_0 - x_0\|)\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{d + d\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon$ . Теорема доказана.

## 19. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов.

Пусть  $X$  и  $Y$  – линейные нормированные пространства над полем действительных или полем комплексных чисел.

**Определение 1.** *Отображение  $A: X \rightarrow Y$  ( $y = Ax$ ), то есть оператор  $A$ , определяемый на  $X$  с областью значений в  $Y$ , называется линейным оператором, если для любых элементов  $x_1, x_2 \in X$  и любого числа  $\lambda$  справедливы равенства:*

$$a) A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,$$

$$б) A(\lambda x_1) = \lambda Ax_1$$

**Определение 2.** *Оператор  $A: X \rightarrow Y$  непрерывен в точке  $x_0 \in X$  если для любой последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $x_0$  соответствующая последовательность образов  $\{Ax_n\}$  сходится к элементу  $Ax_0$ , то есть для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  и такое, что как только выполняется неравенство  $\|x_n - x_0\|_X < \delta$  будет выполняться неравенство  $\|Ax_n - Ax_0\|_Y < \varepsilon$*

**Теорема 1.** *Линейный оператор  $A$  непрерывен на всем пространстве  $X$  тогда и только тогда, когда  $A$  – непрерывен в одной точке  $x_0 \in X$ .*

**Доказательство.** Действительно, пусть  $x \in X$  – любая точка и  $x_n \rightarrow x$ . Тогда

$$x_n - x - x_0 \rightarrow x \text{ и ввиду непрерывности } A \text{ в точке } x_0: Ax_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n - x - x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n - Ax - Ax_0, \text{ то есть } \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax.$$

**Примеры:**

1)  $A=0$  или  $A=I$  (тождественный оператор) линейные непрерывные операторы.

2)  $X=C[0,1]$ ,  $\|x(t)\|_C = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$ ,

**Определение 3.** *Оператор  $A$  называется ограниченным, если существует постоянная  $M$  такая, что оценка  $\|Ax\| \leq M\|x\|$  выполняется для всех  $x \in X$ .*

Ограниченный оператор переводит ограниченное множество пространства  $X$  в ограниченное множество пространства  $Y$ .

**Теорема 2.** *Для того чтобы линейный оператор  $A$  был непрерывен необходимо и достаточно, чтобы  $A$  был ограничен.*

**Необходимость.** Пусть  $A$  – непрерывен, предположим  $A$  – неограничен. Тогда существует последовательность  $\{x_n\}$ , для членов которой выполняется неравенство

$$\|Ax_n\| \geq n\|x_n\|. \text{ Положим } \xi_n = \frac{1}{n\|x_n\|}, \xi_n \rightarrow 0, \text{ так как } \|\xi_n\| = \frac{1}{n}. \text{ Но } \|A\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|Ax_n\| \geq 1, \text{ то}$$

есть  $A\xi_n$  не стремится к  $A0 = 0$ . Следовательно, оператор  $A$  не является непрерывным.

**Достаточность.** Пусть  $A$  – ограничен, то есть  $\|Ax_n\| \leq M\|x_n\|$ . Если  $x_n \rightarrow x$ , или  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то из неравенства  $\|Ax_n - Ax\| \leq M\|x_n - x\|$  следует  $Ax_n \rightarrow Ax$ , значит  $A$  – непрерывен.

**Определение 4.** *Наименьшая из постоянных  $M$ , удовлетворяющих условию  $\|Ax\| \leq M\|x\|$  для линейного ограниченного оператора  $A$  называется нормой*

*оператора  $A$  и обозначается  $\|A\|$ . Другими словами  $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ .*

**Теорема 3.** Если  $X$  – линейное нормированное пространство, а  $Y$  – банахово пространство (полное линейное нормированное пространство), то пространство  $L(X \rightarrow Y)$  также будет полным, то есть банаховым.

**Доказательство.** Пусть последовательность операторов  $\{A_n\}$  фундаментальна в  $L(X \rightarrow Y)$ ,  $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \rightarrow 0$ ,  $n, m \rightarrow \infty$ , следовательно,  $\|A_n x - A_m x\| \rightarrow 0$ ,  $n, m \rightarrow \infty$ , а значит последовательность  $\{A_n\}$  фундаментальная, то есть ограниченная:  $\|A_n\| \leq M$  для всех номеров  $n$ . Отсюда  $\|A_n x\| \leq M \|x\|$  и  $\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq M \|x\|$ , что и означает ограниченность оператора  $A$ . Докажем формулу  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  в смысле  $\|A - A_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N = N(\varepsilon)$  такой, что при всех  $n \geq N$  и любом натуральном  $p$  для всех  $x \in X$ ,  $\|x\| \leq 1$ , выполняется неравенство  $\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$ , переходя в пределе при  $p \rightarrow \infty$ , получим  $\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$  для любого  $n \geq N$  и любого  $x \in X$ ,  $\|x\| \leq 1$ . Но тогда  $\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon$ , то есть  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  в смысле сходимости по норме пространства  $L(X \rightarrow Y)$ . Теорема доказана.

**Следствие.** Пространство  $X^*$ , сопряженное к линейному нормированному пространству  $X$  – банахово, так как  $R_1$  – банахово пространство

## 20. Теорема Банаха-Штейнгауза и следствие из нее Пример из теории рядов Фурье на применение теоремы Б-Ш.

**Теорема 4** (теорема Банаха-Штейнгауза – принцип равномерной ограниченности). Пусть  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства. Если  $A_n \in L(X \rightarrow Y)$  и последовательность  $\|A_n x\|$  ограничена для любого  $x$ , то найдется постоянная  $C$  такая, что  $\|A_n\| \leq C$ , то есть числовая последовательность  $\{\|A_n\|\}$  ограничена.

**Доказательство.** Предположим, что последовательность  $\{\|A_n\|\}$  неограниченна, тогда множество  $\{\|A_n x\|\}$  неограниченно на любом замкнутом шаре  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$ ,  $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ . В самом деле, если бы неравенство  $\|A_n x\| \leq C$  выполнялось для всех номеров  $n$  и всех  $x \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ , то, взяв, любой элемент  $\xi \in X, \xi \neq 0$ , мы получим элемент  $x = \frac{\varepsilon}{\|\xi\|} \xi + x_0 \in \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ . Для этого элемента  $\|A_n x\| \leq C$ , или

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|} \|A_n \xi\| - \|A_n x_0\| \leq \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|} A_n \xi + A_n x_0 \right\| = \|A_n x\| \leq C, \quad \text{следовательно,}$$

$$\|A_n \xi\| \leq \frac{C + \|A_n x_0\|}{\varepsilon} \|\xi\| \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|\xi\| \text{ и } \|A_n\| \leq \frac{2C}{\varepsilon}, \text{ что противоречит предположению.}$$

Если теперь  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$  – любой замкнутый шар, то на нем множество  $\{\|A_n x\|\}$  неограниченно. Тогда существуют номер  $n_1$  и элемент  $x_1 \in \overline{B}_0$  такие, что  $\|A_{n_1} x_1\| > 1$ . В силу непрерывности оператора  $A_{n_1}$  неравенство  $\|A_{n_1} x\| > 1$  выполняется и в некотором шаре  $\overline{B}_1(x_1, \varepsilon_1) \subset \overline{B}_0$ . На  $\overline{B}_1$  множество  $\{\|A_n x\|\}$  также неограниченно и существуют номер  $n_2$  и элемент  $x_2 \in \overline{B}_1$  такие, что  $\|A_{n_2} x_2\| > 2$  и по непрерывности оператора  $A_{n_2}$  это неравенство выполнено в некотором замкнутом шаре  $\overline{B}_2(x_2, \varepsilon_2) \subset \overline{B}_1$  и так далее. Можно считать, что  $n_1 < n_2 < n_3 \dots$  и  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Тогда по теореме о вложенных шарах из §6 существует единственная точка  $x \in \overline{B}_n(x_n, \varepsilon_n)$  для всех номеров  $n$ . В этой точке  $\|A_{n_k} x\| > k$ , что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства,  $A_n \in L(X \rightarrow Y)$ , существует последовательность  $\{x_n\}$  такая, что  $\|x_n\| \leq 1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x_n\| = \infty$ . Тогда существует  $x_0 \in X, \|x_0\| \leq 1$  и  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|A_n x_0\| = \infty$ .

Приведем пример применения теоремы 4 в теории рядов Фурье. Мы докажем существование непрерывной периодической функции, для которой ряд Фурье расходиться.

$$\text{Пусть } f(x) \in C[-\pi, \pi], \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt.$$

Преобразуем частичную сумму ряда Фурье

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}} dt.$$

Положим  $x=0$  и  $g(t) = \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}$ ;  $g(t)$  непрерывная на  $[-\pi, \pi]$  функция, если ее

доопределить нулем в точке.

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} &= \frac{\sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin(nt)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + \frac{\cos(nt)}{2} = \\ &= \frac{\sin(nt)}{t} + g(t)\sin(nt) + \frac{\cos(nt)}{2} \end{aligned}$$

Таким образом,  $S_n(f, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt + O(1)$ ,  $O(1) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим

оператор  $A_n f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(nt)}{t} dt$  - линейный оператор из пространства  $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ ,

$f(-\pi) = f(\pi)$  в пространстве  $R_1$ , ставящий с точностью до  $O(1)$  в соответствие  $f(x)$  ее частичную сумму ряда Фурье в точке  $x=0$ . Пусть  $f_n(t) = \operatorname{sgn} t \cdot \sin(nt)$ ,  $\|f_n(t)\|_C = 1$ ,

$$\begin{aligned} A_n f_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(nt)}{|t|} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2(nt)}{|t|} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 y}{y} dy > \frac{1}{\pi} \int_1^{\pi} \frac{\sin^2 y}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_1^{\pi} \frac{dy}{t} - \frac{1}{\pi} \int_1^{\pi} \frac{\cos 2y}{y} dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \ln(\pi n) + O(1) \text{ так как интеграл } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2y}{y} dy \text{ сходится по признаку Дирихле-} \end{aligned}$$

Абея. Итак,  $|A_n f_n| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  и согласно следствию к теореме 4 существует  $f_0(x) \in C[-\pi, \pi]$ ,  $f_0(-\pi) = f_0(\pi)$  для которой ряд Фурье расходится в точке  $t=0$ .

## 21. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора.

Пусть оператор  $A$  действует из множества  $X$  на множество  $Y$ ,  $R(A) \subset Y$  - область значений оператора  $A$ . Если для любого элемента  $y \in R(A)$  уравнение  $Ax = y$  имеет единственное решение, то говорят, что оператор  $A$  имеет обратный оператор  $A^{-1}$ , то есть  $x = A^{-1}y$ . Очевидно, что  $x = A^{-1}Ax$  и  $y = AA^{-1}y$ , или операторы  $I_X = A^{-1}A$ ,  $I_Y = AA^{-1}$  - тождественные операторы в  $X$  и  $Y$ . Если  $A$  - линейный оператор, то и  $A^{-1}$  - линейный оператор.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  - линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства  $X$  в линейное нормированное пространство  $Y$ , причем существует постоянная  $m > 0$  такая, что  $\|Ax\| \geq m\|x\|$  для всех  $x$  из  $X$ .

Тогда существует  $A^{-1}$  - линейный ограниченный оператор.

**Доказательство.** Прежде всего докажем, что уравнение  $Ax = y$ ,  $y \in R(A)$ , имеет единственное решение. Предположим, их два:  $x_1$  и  $x_2$ :  $Ax_1 = y$ ,  $Ax_2 = y$ , тогда  $A(x_1 - x_2) = 0$  и  $m\|x_1 - x_2\| \leq \|A(x_1 - x_2)\| = 0$ . Значит,  $x_1 = x_2$  и существует  $A^{-1}$  - линейный оператор. Этот оператор ограничен, ибо

$$\|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m} \|AA^{-1}y\| = \frac{1}{m} \|y\| \text{ для всех } y \in Y.$$

**Теорема 2 (Теорема Неймана).** Пусть  $A$  - линейный ограниченный оператор, отображающий банахово пространство  $X$  на себя и  $\|A\| \leq q < 1$ . Тогда оператор  $I - A$  имеет обратный линейный ограниченный оператор  $(I - A)^{-1}$ .

**Доказательство.** Определим степени оператора  $A$ :

$A^k = A(A^{k-1})$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $A^0 = I$  - тождественный оператор. Ясно, что

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \leq q^k. \text{ Далее } \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \text{ пространство } L(X \rightarrow X) -$$

банахово, значит сумма  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$  представляет собой линейный ограниченный оператор. Для любого натурального числа  $n$  имеют место соотношения

$$(I - A) \sum_{k=0}^n A^k = \sum_{k=0}^n (I - A)A^k = \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = I - A^{n+1}, \text{ причем } I - A^{n+1} \rightarrow I \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

ибо

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n \rightarrow 0. \text{ Следовательно, } (I - A) \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I, \text{ то есть } (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \text{ причем}$$

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-q}.$$

**Замечание.** Пусть  $A, B \in L(X \rightarrow X)$ . Тогда определен оператор  $AB \in L(X \rightarrow X)$  по формуле  $ABx = A(Bx)$ , причем  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ . Действительно,

$$\|ABx\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| \text{ для любого } x \in X.$$

**Теорема 3.** Пусть оператор  $A \in L(X \rightarrow X)$ , где  $X$  - банахово пространство, имеет обратный оператор  $A^{-1}$  и существует линейный ограниченный оператор  $\Delta A$  такой, что  $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ . Тогда оператор  $B = A + \Delta A$ , то есть возмущение оператора  $A$ ,

имеет обратный оператор  $B^{-1}$ , причем  $\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|\Delta A\| \|A^{-1}\|^2}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|}$ .

## 22. Теорема Банаха об обратном операторе.

Теорема 4 (теорема Банаха об обратном операторе).

Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства, линейный ограниченный оператор  $A$  отображает всё пространство  $X$  на всё пространство  $Y$  взаимно однозначно.

Тогда существует обратный линейный ограниченный оператор  $A^{-1}$ .

**Доказательство.** По условию линейный оператор  $A$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами  $X$  и  $Y$ . По доказанному выше обратный оператор  $A^{-1}$ , отображающий  $Y$  на  $X$ , также является линейным. Остается доказать ограниченность оператора  $A^{-1}$ .

Обозначим через  $Y_n$  множество элементов  $y \in Y$  таких, что  $\|A^{-1}y\| \leq n\|y\|$ . Каждое из множеств  $Y_n$  не пусто, так как, например, нулевой элемент пространства  $Y$  принадлежит всем  $Y_n$ . Кроме того, всякий элемент  $y \in Y$ ,  $y \neq 0$ , попадает в множество  $Y_n$ , если в качестве  $n$  взять любое целое число, превосходящее  $\frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|}$ .

Поэтому можно записать  $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ .

Ввиду того, что полное пространство  $Y$  не может быть объединением счетного числа нигде не плотных множеств (теорема Бэра категориях из §6), по крайней мере, одно из множеств  $Y_{n_0}$  не является нигде не плотным. Следовательно, существует шар  $B(y, r)$ , в котором множество  $B(y, r) \cap Y_{n_0}$  всюду плотно. Рассмотрим шар  $\bar{B}(y_1, r_1)$ , лежащий целиком внутри  $B(y, r)$  и такой, что  $y_1 \in Y_{n_0}$ . Возьмем любой элемент  $y$  с нормой  $\|y\| = r_1$ . Элемент  $y + y_1 \in \bar{B}(y_1, r_1)$ , ибо  $\|(y + y_1) - y_1\| = \|y\| = r_1$ . Так как  $\bar{B}(y_1, r_1) \subset \overline{Y_{n_0}}$ , то найдется последовательность элементов  $\{z^{(k)}\}$  из  $Y_{n_0} \cap \bar{B}(y_1, r_1)$  и такая, что  $z^{(k)} \rightarrow y + y_1$  при  $k \rightarrow \infty$ . Эта последовательность может быть стационарной, если  $y + y_1 \in Y_{n_0}$ .

Обозначим  $y^{(k)} = z^{(k)} - y_1 \rightarrow y$ ; при этом можем считать, что  $\frac{r_1}{2} \leq \|y^{(k)}\|$ , и, кроме того,  $\|y^{(k)}\| \leq r_1$ .

Так как  $z^{(k)}$  и  $y_1 \in Y_{n_0}$ , то

$$\|A^{-1}y^{(k)}\| = \|A^{-1}z^{(k)} - A^{-1}y_1\| \leq \|A^{-1}z^{(k)}\| + \|A^{-1}y_1\| \leq n_0(\|z^{(k)}\| + \|y_1\|).$$

Далее,  $\|z^{(k)}\| = \|y^{(k)} + y_1\| \leq \|y^{(k)}\| + \|y_1\| \leq r_1 + \|y_1\|$ .

Поэтому имеем оценку  $\|A^{-1}y^{(k)}\| \leq n_0(r_1 + 2\|y_1\|) \leq \frac{2n_0(r_1 + 2\|y_1\|)}{r_1} \|y_k\|$ .

Обозначим через  $N$  наименьшее целое число, превосходящее  $\frac{2n_0(r_1 + 2\|y_1\|)}{r_1}$ .

Для элементов последовательности  $\{y^{(k)}\}$  справедливо неравенство

$$\|A^{-1}y^{(k)}\| \leq N\|y^{(k)}\|, \text{ откуда следует, что все } y^{(k)} \in Y_N.$$

Итак, любой элемент  $y$  с нормой, равной  $r_1$ , можно аппроксимировать элементами из  $Y_N$ . Пусть теперь  $y$  — любой элемент из  $Y$ . Рассмотрим элемент  $y' =$

$$\frac{r_1}{\|y\|} y,$$

$\|y'\| = r_1$ . По доказанному найдется последовательность  $\{y^{(k)}\}$  элементов из  $Y_N$ , сходящаяся к  $y'$ . Тогда  $y^{(k)} = y' \frac{\|y\|}{r_1} \rightarrow y$  и справедливы соотношения

$$\|A^{-1}y^{(k)}\| = \frac{\|y\|}{r_1} \|A^{-1}y'\| \leq \frac{\|y\|}{r_1} N\|y'\| = N\|y\|.$$

Отсюда следует, что  $y^{(k)} \in Y_N$ , то есть множество  $Y_N$  всюду плотно в  $Y$ .

Рассмотрим снова произвольный элемент  $y \in Y$ . Пусть  $\|y\| = \ell$ . Выберем  $y_1 \in Y_N$  такой, что  $\|y - y_1\| \leq \frac{\ell}{2}$ ,  $\|y_1\| \leq \ell$ .

Это можно сделать, так как  $\overline{B}(0, \ell) \cap Y_N$  всюду плотно в  $B(0, \ell)$  и  $y \in \overline{B}(0, \ell)$ . Найдем далее элемент  $y_2 \in Y_N$  такой, что  $\|(y - y_1) - y_2\| \leq \frac{\ell}{2^2}$ ,  $\|y_2\| \leq \frac{\ell}{2}$ ; возможность выбора обеспечена тем, что  $\overline{B}(0, \frac{\ell}{2}) \cap Y_N$  всюду плотно в  $\overline{B}(0, \frac{\ell}{2})$  и  $y - y_1 \in \overline{B}(0, \frac{\ell}{2})$ . Продолжая этот процесс, построим элементы  $y_n \in Y_N$  такие, что  $\|y - (y_1 + \dots + y_n)\| \leq \frac{\ell}{2^n}$ ,  $\|y_n\| \leq \frac{\ell}{2^{n-1}}$ .

В итоге получим представление  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k$ . Обозначим  $x_k = A^{-1}y_k$ , тогда  $\|x_k\| \leq N\|y_k\| \leq \frac{N\ell}{2^{k-1}}$ . Последовательность  $\{S_n\}$ , где  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , при  $n \rightarrow \infty$  сходится к некоторому пределу  $x \in E$ , так как

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| < \frac{N\ell}{2^{n-1}}$$

и  $X$  – полное пространство. Следовательно,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Далее  $Ax = A(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Ax_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k = y$ .

Отсюда  $\|A^{-1}y\| = \|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{N\ell}{2^{k-1}} = 2N\ell = 2N\|y\|$ .

Так как  $y$  – любой элемент из  $Y$ , то ограниченность оператора  $A^{-1}$  доказана.

### 23. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в линейном нормированном пространстве.

**Теорема 1(теорема Хана-Банаха).** Любой линейный функционал  $f(x)$ , определённый на линейном многообразии  $L \subset X$  линейного нормированного пространства  $X$ , можно продолжить на всё пространство  $X$  с сохранением нормы, то есть существует линейный функционал  $F(x)$ , определённый на всём  $X$  и такой, что  $F(x) = f(x)$  для любой точки  $x \in L$ ,  $\|F\|_X = \|f\|_L$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \notin L$  и  $L_0 = (L, x_0)$  - множество элементов вида  $u = x + tx_0$ , где  $x \in L$ , а  $t$  – любое действительное число. Множество  $L_0$  - линейное многообразие и каждый его элемент однозначно представим в таком виде. Пусть  $u = x_1 + t_1 x_0 = x_2 + t_2 x_0$ ; если  $t_1 = t_2$ , то  $x_1 = x_2$ ; если  $t_1 \neq t_2$ , то  $\frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1} = x_0$  и  $x_0 \in L$ , что невозможно.

Выберем любые два элемента  $x_1$  и  $x_2$  из  $L$ . Справедливы соотношения  $f(x_1) - f(x_2) = f(x_2 - x_1) \leq \|f\| \|x_2 - x_1\| \leq \|f\| (\|x_2 + x_0\| + \|x_1 + x_0\|)$ , из которых вытекает неравенство  $f(x_2) - \|f\| \|x_2 + x_0\| \leq f(x_1) + \|f\| \|x_1 + x_0\|$ , а в силу произвольности элементов  $x_1$  и  $x_2$  имеет место оценка

$$\sup_{x \in L} \{f(x) - \|f\| \|x + x_0\|\} \leq c \leq \inf_{x \in L} \{f(x) + \|f\| \|x + x_0\|\}.$$

Пусть  $u$  – любой элемент из  $L$ . Введём функционал  $\varphi(u)$  на  $L_0$  по правилу  $\varphi(u) = f(x) - tc$ . На  $L$  имеет место равенство  $\varphi = f$ , так как  $t = 0$ . Очевидно, что  $\varphi(u)$  - линейен; покажем ограниченность функционала  $\varphi(u)$  и равенство  $\|\varphi\| = \|f\|$ .

Если  $t > 0$ , то из принадлежности элемента  $\frac{x}{t}$  многообразию  $L$  и неравенства для постоянной  $c$  справедливы соотношения

$$\varphi(u) = t[f(\frac{x}{t}) - c] \leq t\|f\| \|\frac{x}{t} + x_0\| = \|f\| \|x + tx_0\| = \|f\| \|u\|, \quad \text{итогом которых является}$$

неравенство

$$\varphi(u) \leq \|f\| \|u\|. \quad \text{При } t < 0 \text{ имеем } f(\frac{x}{t}) - c \geq -\|f\| \|\frac{x}{t} + x_0\| = -\frac{1}{|t|} \|f\| \|x + tx_0\| = \frac{1}{|t|} \|f\| \|u\|, \text{ а,}$$

значит,

$$\varphi(u) = t[f(\frac{x}{t}) - c] \leq t * \frac{1}{|t|} \|f\| \|u\| = \|f\| \|u\|, \quad \text{то есть } \varphi(u) \leq \|f\| \|u\|. \quad \text{Заменяя в этих}$$

рассуждениях элемент  $u$  на  $(-u)$ , получим  $-\varphi(u) \leq \|f\| \|u\|$ , в совокупности  $|\varphi(u)| \leq \|f\| \|u\|$ . Мы доказали неравенство  $\|\varphi\| \leq \|f\|$ , но так как  $\varphi(u)$  есть продолжение  $f(x)$ , то его норма не может быть уменьшена; следовательно,  $\|\varphi\|_{L_0} = \|f\|_L$ .

Закончим доказательство теоремы в случае сепарабельного пространства  $X$ , то есть такого пространства, в котором существует счётное всюду плотное множество элементов  $x_1, x_2, \dots \in X$ . Пусть эти элементы линейно независимы и не попали в  $L_0$ . Продолжая функционал  $\varphi(u)$  с многообразия  $L_0$  на многообразия  $L_1 = (L_0, x_1)$ ,  $L_2 = (L_1, x_2)$ , ..., мы построим линейный функционал  $\psi(x)$  определённый на всюду плотном в  $X$  линейном многообразии  $\hat{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$ , причём

$\|\psi\|_{\hat{L}} = \|f\|_L$ . Доопределим  $\psi(x)$  на всё пространство  $X$  по непрерывности. Если  $x \notin \hat{L}$ , то существует последовательность  $\{x_n\}$  элементов из  $\hat{L}$  и  $x_n \rightarrow x$  при  $n \rightarrow \infty$ , причём  $|\psi(x_m) - \psi(x_n)| \leq \|\psi\| \|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ . Следовательно, последовательность  $\{\psi(x_n)\}$  имеет предел  $F(x)$ , однозначно определяющая функционал  $F(x)$  на  $X$ . Этот функционал линеен в силу линейности  $\psi(x)$  и линейности операции предельного перехода. Ограниченность  $F(x)$  вытекает из того, что следствием неравенства  $|\psi(x_n)| \leq \|\psi\| \|x_n\|$  является неравенство  $|F(x)| \leq \|\psi\| \|x\|$ . Итак,  $\|F\|_X \leq \|\psi\|_{\hat{L}} = \|f\|_L$ , а так как  $F(x)$  - продолжение функционала  $f(x)$ , то его норма не может быть уменьшена. Мы доказали формулу  $\|F\|_X = \|f\|_L$ , завершив тем самым доказательство теоремы.

**Следствие 1.** Пусть  $X$  – линейное нормированное пространство,  $x_0 \in X$ ,  $x_0 \neq 0$ . Тогда в  $X$  существует линейный функционал такой, что  $\|f\| = 1$ ,  $f(x_0) = \|x_0\|$ .

**Следствие 2.** Пусть  $X$  – линейное нормированное пространство,  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 \neq x_2$ . Тогда в  $X$  существует линейный функционал такой, что  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

## 24. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах.

Обсудим вопрос об общем виде линейного функционала в различных нормированных пространствах.

1) Если  $X = \mathbb{R}^n$ -конечномерное и  $e_1, \dots, e_n$  - ортонормированный базис, то  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ . Тогда любой линейный функционал  $f(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i$  однозначно определяется числами  $f_i = f(e_i), i = \overline{1, n}$

2) Если  $X = l_p, p > 1$ -бесконечномерное пространство элементов  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  таких, что  $\|x\|_{l_p} = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ . Пусть  $e_1, e_2, \dots$ -ортонормированный базис  $l_p$ , тогда  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i, f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i$ . Выясним свойства чисел  $c_i, i = 1, 2, \dots$ . Рассмотрим

последовательность элементов  $x_n = \{\xi_k^{(n)}\}$ , где  $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |c_k|^{q-1} \operatorname{sgn} c_k, & k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Справедливы соотношения  $f(x_n) = \sum_{k=1}^n |c_k| \leq \|f\| \|x_n\|_{l_p} = \|f\| (\sum_{k=1}^n |c_k|^{(q-1)p})^{\frac{1}{p}} = \|f\| (\sum_{k=1}^n |c_k|^q)^{\frac{1}{p}}$ ,

откуда в силу произвольности числа  $n$  следует неравенство  $(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|$  или  $\|c\|_{l_q} \leq \|f\|$ . С другой стороны в силу неравенства Гёльдера

$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i c_i \right| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \|c\|_{l_q} \|x\|_{l_p}$ , или  $\|f\| \leq \|c\|_{l_q}$ . Значит,  $\|f\| = \|c\|_{l_q}$ , то есть  $l_p^* = l_q$ . Заметим также,  $l_p^{**} = l_q^* = l_p$ -рефлексивно.

3) Если  $X = L_p(E), p > 1, |E| < +\infty$ . Можно показать, что  $f(x) = \int_E x(t)y(t)dt, x(t) \in L_p(E), y(t) \in L_q(E)$ -однозначно определяемая функция по функционалу  $f(x)$ , причём  $\|f\| = \|y\|_{L_q(E)}, L_p^* = L_q, L_p^{**} = L_p$

4) Если  $X = C[0,1]$ . Справедлива теорема Рисса, в которой утверждается, что любой линейный функционал  $f(x)$  на  $C[0,1]$  имеет вид  $f(x) = \int_0^1 x(t)dh(t)$ , где  $x(t) \in C[0,1], h(t)$ - фиксированная функция с ограниченным изменением:

$\|f\| = \bigvee_0^1 \{h(t)\} = \sup_T \sum_{i=1}^n |h(t_i) - h(t_{i-1})|$ , где точная верхняя грань берётся по всевозможным разбиениям  $T = \{t_i\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$

---

## 25. Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости.

**Теорема 2.** Пусть  $\{x_n\}$ -последовательность элементов из банахового пространства  $X$  такая, что последовательность  $\{f(x_n)\}$  ограничена для любого функционала  $f(x) \in X^*$ . Тогда существует постоянная  $M > 0$  и такая, что  $\|x_n\| \leq M$ , то есть последовательность  $\{x_n\}$  ограничена в  $X$ .

**Теорема 3.** Пусть  $X$  – банахово пространство,  $f_n \in X^*$ , числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  ограничена в  $X^*$ , то есть  $\|f_n\| \leq M$ .

**Определение 1.** Последовательность  $\{x_n\}$  элементов линейного нормированного пространства  $X$  называется слабо сходящейся к элементу  $x_0 \in X$ , если для любого линейного функционала  $f(x) \in X^*$  числовая последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к  $f(x_0)$ .

В силу замечания к следствию 1 из теоремы 1 слабый предел единственен. Из теоремы 2 вытекает ограниченность слабо сходящейся последовательности.

Сильная сходимость влечёт за собой слабую сходимость, так как  $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \|f\| \|x_n - x_0\|$ . Обратное неверно. Рассмотрим  $l_p, p > 1$  и последовательность  $\{x_n\}$  элементов из  $l_p$ ,  $x_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , единица стоит на месте с номером  $n$ ,  $f(x_n) = C_n$ . Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^q$  сходится, то  $C_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, значит,  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $f(0) = 0$ , или  $x_n \rightarrow 0$  слабо. Однако,  $\|x_m - x_n\|^p = 2, m \neq n$ , и последовательность  $\{x_n\}$  не фундаментальна.

**Теорема 4.** Последовательность  $\{x_n\}$  линейного нормированного пространства  $X$  сходится сильно тогда и только тогда, когда последовательность  $\{f(x_n)\}$  сходится равномерно в единичном шаре  $\|f\| \leq 1, f \in X^*$ .

**Доказательство.** Необходимость. Если  $x_n \rightarrow x$  сильно, то из неравенства  $|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| \leq \|x_n - x\|$  следует равномерная сходимость  $\{f(x_n)\}$  в шаре  $\|f\| \leq 1$ .

Достаточность. Пусть последовательность  $\{f(x_n)\}$  сходится равномерно в шаре  $\|f\| \leq 1$ , то есть  $\forall \varepsilon > 0$  существует  $N = N(\varepsilon)$ , что  $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| < \varepsilon$  для всех  $n \geq N$  и всех  $f \in X^*, \|f\| \leq 1$ . Отсюда следует  $\sup_{\|f\| \leq 1} |f(x_n - x)| \leq \varepsilon$ . Воспользуемся следствием 1 к теореме Хана-Банаха, обозначив  $x_0 = x_n - x$ . Мы имеем функционал  $f_0(x), \|f_0\| = 1, f_0(x_0) = \|x_0\|$  или  $f_0(x_n - x) = \|x_n - x\|$ , причём выбор функционала  $f_0(x)$  зависит от разности  $x_n - x$ . Итак,  $\|x_n - x\| = f_0(x_n - x) \leq \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x_n - x)| \leq \varepsilon$  для всех  $n \geq N$ , что и означает сильную сходимость  $\{x_n\}$  к элементу  $x$ .

Теорема доказана.

---

**26. Определение Гильбертова пространства и его основных свойств.**  
**Теорема об элементе с наименьшей нормой.**

**Определение 1.** Гильбертовым пространством  $H$  называется множество элементов  $x, y, z, \dots$  со свойствами:

1)  $H$  – линейное пространство над полем действительных (комплексных) чисел;

2) каждой паре  $x, y \in H$  поставлено в соответствие действительное (комплексное) число  $(x, y)$ , называемое скалярным произведением и удовлетворяющее условиям:

а).  $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ,

б).  $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ ,

в).  $(\lambda xy) = \lambda(x, y)$  для любого  $\lambda \in \mathbb{R}$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ),

г).  $(x, x) \geq 0$ , причем  $(x, x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ,

$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  – норма элемента  $x$  в  $H$ ;

3).  $H$  – полное в метрике  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ , то есть является банаховым пространством;

4).  $H$  – бесконечномерное, то есть для любого натурального числа  $n$  существует  $n$  линейно независимых элементов.

Комплексное пространство  $L_2$  – гильбертово пространство, если скалярное произведение в нем ввести по формуле

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_i,$$

где  $x = (\xi_1, \xi_2, \dots), y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ . Сходимость ряда следует из неравенства Коши-Буняковского. Аналогично, пространство  $L_2(E)$  – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_E x(t) \overline{y(t)} dt.$$

**Определение 2.** Множество  $W$  называется *выпуклым*, если

$$\forall \alpha \in [0; 1] \quad x, y \in W \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in W.$$

**Теорема 1.** Замкнутое выпуклое множество  $W$  в гильбертовом пространстве  $H$  содержит элемент с наименьшей нормой, и причем только один.

**Доказательство.** Пусть  $d = \inf_{x \in W} \|x\|$  и пусть  $\{x_n\}$  – минимизирующая последовательность, то есть  $x_n \in W, \|x_n\| \rightarrow d$  при  $n \rightarrow \infty$ . Так как  $W$  – выпукло, то

$\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in W$ , поэтому  $\|x_n + x_m\| \geq 2d$ . Согласно равенству параллелограмма

$$0 \leq \|x_n + x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \|x_n - x_m\|^2 \rightarrow 0$$

при  $n, m \rightarrow \infty$ , ибо вычитаемая величина  $\geq 4d^2$ , а уменьшаемое стремится к  $4d^2$ . В силу того, что  $H$  – полное, а  $W$  – замкнуто, существует  $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_0 \in W$ ,

причем  $\|x_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = d$ , то есть  $x_0$  – элемент с наименьшей нормой. Докажем единственность элемента  $x_0$ : пусть  $x_1$  – еще один элемент из  $W$  и такой, что  $\|x_1\| = d$ .

Тогда

$$\|x_0 + x_1\|^2 + \|x_0 - x_1\|^2 = 2(\|x_0\|^2 + \|x_1\|^2) = 4d^2.$$

Так как

$$\frac{x_0 + x_1}{2} \in W,$$

то

$$d \leq \frac{\|x_0 + x_1\|}{2} \leq \frac{1}{2}(\|x_0\| + \|x_1\|) = d, \text{ или } \|x_0 + x_1\|^2 = 4d^2.$$

Возвращаясь к равенству параллелограмма для  $x_0$  и  $x_1$ , имеем  $\|x_0 - x_1\| = 0$ , то есть  $x_0 = x_1$ . Теорема доказана.

**Утверждение 1.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство, тогда для любых  $x, y \in H$  верно неравенство

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

**Доказательство.** При  $y = 0$  справедливость утверждения очевидна, поэтому далее в доказательстве положим  $y \neq 0$ . Для произвольного  $\lambda$  верно

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x, x) - \bar{\lambda}(x, y) - \lambda(y, x) + |\lambda|^2(y, y).$$

Положив  $\lambda = \frac{(x, y)}{(y, y)}$ , получим

$$0 \leq (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)},$$

откуда следует требуемое неравенство.  $\square$

---

**27. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение Гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.**

**Определение 2.** Два элемента  $x, y \in H$  называются ортогональными ( $x \perp y$ ), если  $(x, y) = 0$ ; говорят, что элемент  $x \in H$  ортогонален множеству  $L \subset H$ , если  $x \perp y$  для любого  $y \in L$ .

**Теорема 2 (теорема Б. Леви).** Пусть  $L$  – подпространство  $H$ . Каждый вектор  $x \in H$  допускает единственное представление  $x = y + z, y \in L, z \perp L$ , причем элемент  $y$  осуществляет наилучшее приближение вектора  $x$  в подпространстве  $L$ , то есть  $\|x - y\| \leq \min_{u \in L} \|x - u\|$ .

**Доказательство.** Обозначим множество  $W = \{x - u; u \in L\}$ , которое замкнуто в силу замкнутости  $L$  и, очевидно, выпуклое. По теореме 1 существует единственный элемент  $z \in W$  с минимальной нормой,  $z = x - y, y \in L$ , или  $y = x - z$ . Покажем, что  $z \perp L$ . Пусть  $v \neq 0$  – любой вектор из  $L$ , а  $\lambda$  – произвольное комплексное число. Так как  $z - \lambda v \in W$ , то  $\|z - \lambda v\|^2 \geq \|z\|^2$ , поэтому

$$\|z\|^2 \leq (z - \lambda v, z - \lambda v) = \|z\|^2 - \lambda(v, z) - \bar{\lambda}(z, v) + |\lambda|^2 \|v\|^2.$$

Полагая

$$\lambda = \frac{(z, v)}{\|v\|^2},$$

получим

$$-\frac{|(z, v)|^2}{\|v\|^2} \geq 0, \text{ или } (z, v) = 0,$$

а так как  $v$  – любой элемент из  $L$ , то  $z \perp L$ . Докажем теперь единственность разложения. Пусть  $y + z = y_1 + z_1$ , где  $y, y_1 \in L, z, z_1 \perp L$ , тогда  $y - y_1 = z_1 - z$ , то есть  $y - y_1 \perp L$ , другими словами,  $y - y_1$  ортогонален самому себе. Следовательно  $y = y_1$  и  $z = z_1$ . Второе утверждение теоремы следует из определения  $W$  и теоремы 1.

Предел последовательности элементов, ортогональных подпространству  $L$ , ортогонален  $L$ . Поэтому элементы, ортогональные к  $L$ , образуют подпространство, которое называется ортогональным дополнением к  $L$  и обозначается  $L^\perp$ . Так как любой элемент  $x \in H$  равен  $x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$ , то говорят, что пространство  $H$  разлагается в прямую сумму подпространств  $L$  и  $L^\perp$ . Записывают этот факт в виде  $H = L \oplus L^\perp$ . Элемент  $y$  называется ортогональной проекцией элемента  $x$  на подпространство  $L$ , а оператор  $P$ , действующий по закону  $y = Px$ , то есть каждому элементу  $x \in H$  ставящий в соответствие его проекцию  $y$ , называется оператором ортогонального проецирования или ортопроектором. Нетрудно проверить справедливость равенства  $(L^\perp)^\perp = L$ .

Рассмотрим линейный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства  $H$  на комплексную плоскость  $C$ . Этот оператор мы также будем называть линейным функционалом. Обозначим через  $\ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$  – множество, называемое ядром функционала  $f(x)$ . Очевидно, что  $\ker f$  – подпространство  $H$ .

---

**28. Теорема Рисса - Фреше об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.**

**Теорема 3 (теорема Рисса - Фреше).** Любой линейный функционал  $f(x)$  в гильбертовом пространстве  $H$  представим в виде скалярного произведения  $f(x) = (x, y)$ , где элемент  $y$  однозначно определяется по функционалу  $f(x)$ , причем  $\|f\| = \|y\|$ .

**Доказательство.** Если  $f(x) \equiv 0$ , то  $y = 0$ . Если  $f(x) \neq 0$ , то обозначим через  $e$  – единичный вектор, ортогональный ядру  $f(x)$ . Согласно лемме 1 и теореме 2 любой элемент  $x \in H$  представим в виде  $x = Px + (x, e)e$ , где  $P$  – ортопроектор на ядро  $\ker f$ . Отсюда

$$f(x) = f(Px) + (x, e)f(e) = (x, \bar{f}(e), e),$$

так как  $Px \in \ker f$ . Полагая  $y = \bar{f}(e)e$ , получаем  $f(x) = (x, y)$  для любого  $x \in H$ .

Докажем единственность элемента  $y$ . Пусть существует вектор  $y_1$  такой, что  $f(x) = (x, y) = (x, y_1)$  для любого  $x \in H$ , или  $(x, y - y_1) = 0$ . Для  $x = y - y_1$  получим

$$(y - y_1, y - y_1) = \|y - y_1\|^2 = 0,$$

то есть  $y = y_1$ . По поводу нормы заметим

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow \|f\| \leq \|y\|,$$

но

$$f(y) = \|y\|^2 \Rightarrow \|f\| \geq \|y\|,$$

следовательно  $\|f\| = \|y\|$ . Теорема доказана.

---

## 29.Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Беселя.

**Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость ее к нулю.**

**Лемма 2.** Для того, чтобы линейное многообразие  $M$  было всюду плотно в  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы в  $H$  не существовало элемента, отличного от нуля и ортогонального  $M$ .

**Необходимость.** Пусть  $\overline{M} = H$ . Ясно, что из условия  $x \perp M$  следует  $x \perp \overline{M}$ , но  $\overline{M} = H$  и  $x \perp H$ . В частности  $x \perp x$ , следовательно  $x = 0$ .

**Достаточность.** Пусть  $M$  не всюду плотно в  $H$ , то есть  $\overline{M} \neq H$ . Поэтому существует  $x_0 \notin \overline{M}$ ,  $x_0 \in H$ . Так как  $\overline{M}$  также подпространство, то по теореме 2  $x_0 = y + z$ , где  $y \in M, z \perp \overline{M}$ , причем  $z \neq 0$  и  $z \perp M$ . Это противоречит условию.

**Определение 3.** Система  $\{e_n\}$  элементов гильбертова пространства  $H$  называется ортонормированной, если  $(e_i, e_j) = \sigma_{ij}$ , где  $\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ .

**Определение 4.** Бесконечная система элементов линейного пространства называется линейно независимой, если любая конечная подсистема этой системы линейно независима.

**Лемма 3.** Любую систему  $\{h_n\}$  линейно независимых элементов можно сделать ортонормированной с помощью процесса ортогонализации Шмидта.

**Доказательство.** Полагаем

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|};$$

пусть  $g_2 = h_2 - c_{21}e_1$ , подберем  $c_{21}$  так, чтобы  $g_2 \perp e_1$ , то есть  $c_{21} = (h_2, e_1)$ .  
Получаем

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|}, \|g_2\| \neq 0,$$

ибо в противном случае  $g_2 = 0$  и элементы  $h_1$  и  $h_2$  - линейно зависимы, что невозможно. Пусть  $e_1, \dots, e_{m-1}$  уже построены, вводим элемент

$$g_m = h_m - \sum_{i=1}^{m-1} c_{mi}e_i$$

и подберем числа  $c_{mi}$  так, чтобы  $g_m \perp e_i, i = 1, 2, \dots, m-1$ . Для этого надо взять  $c_{mi} = (h_m, e_i)$ ; полагаем

$$e_m = \frac{g_m}{\|g_m\|}, g_m \neq 0$$

и так далее.

Если совокупность степеней  $1, t, t^2, \dots$  ортогонализировать в пространстве  $L_{2,p}(a, b)$  с весом  $\rho(t)$ , то есть в пространстве со скалярным произведением

$$(x(t), y(t)) = \int_a^b \rho(t)x(t)y(t)dt,$$

мы приходим к системе полиномов. При  $\rho(t) \equiv 1, a = -1, b = 1$  получим полиномы Лежандра; при  $\rho(t) = e^{-t^2}, a = -\infty, b = \infty$  получим полиномы Чебышева – Эрмита, при  $\rho(t) = e^{-t}, a = 0, b = \infty$  получим полиномы Чебышева – Лагерра

Пусть  $L$  – подпространство, порожденное ортонормированной системой  $\{e_n\}$  и  $x \in L$ . где  $c_i = (x, e_i)$  – коэффициенты Фурье элемента  $x$

В силу равенства  $\|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$  имеем  $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|x\|^2$  (неравенство Бесселя).

**Определение 5.** Ортонормированная в  $H$  система  $\{e_n\}$  называется полной, если в  $H$  не существует никакого элемента кроме нуля, ортогонального каждому члену  $e_n$  системы  $\{e_n\}$ . Система называется замкнутой, если подпространство  $L$ , порожденное этой системой, совпадает с  $H$ .

**Определение 6.** Замкнутая ортонормированная система называется ортонормированным базисом в гильбертовом пространстве  $H$ .

Легко проверяется справедливость следующих двух утверждений. В гильбертовом пространстве  $H$  полнота и замкнутость ортонормированной системы совпадают. Любая ортонормированная система  $\{e_n\}$  в гильбертовом пространстве слабо сходится к нулю.

---

**30. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех гильбертовых пространств.**

Сепарабельное пространство (от лат. separabilis — делимый) - топологическое пространство, в котором содержится не более чем счётное всюду плотное множество.

**Теорема 4.** В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис, то есть полная ортонормированная система.

**Доказательство.** Пусть  $G = \{g_1, g_2, \dots\}$  – счётное и всюду плотное в гильбертовом пространстве  $H$  множество  $\overline{G} = H$  ( $g_n \neq 0$ ). Положим  $e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$  и обозначим через  $L_1$  - подпространство, порожденное  $e_1$ . Выберем  $g_{n_2}$  - первый по счёту элемент, не принадлежащий  $L_1$  и рассмотрим  $h_2$  - его проекцию на  $L_1^\perp = H \ominus L_1$ . Так как  $h_2 \neq 0$ , то  $e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|}$ , а через  $L_2$  обозначим подпространство, порождённое  $e_1$  и  $e_2$ . Пусть  $g_{n_3} \notin L_2$  - первый по счёту за  $g_{n_2}$  и  $h_3$  его проекция на  $L_2^\perp = H \ominus L_2$ . Так как  $h_3 \neq 0$ , то  $e_3 = \frac{h_3}{\|h_3\|}$  и так далее. Получим ортонормированную систему  $\{e_i\}$  и в силу того, что любой элемент  $g_{n_k} \in L_m$  по построению, то замыкание линейной оболочки системы  $\{e_i\}$  совпадает с  $H$ , то есть эта система образует базис. Теорема доказана.

**Теорема 5.** Любое комплексное (вещественное) сепарабельное гильбертово пространство изоморфно и изометрично комплексному (вещественному) пространству  $l_2$ , то есть все комплексные (вещественные) сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны и изометричны между собой.

**Доказательство.** Пусть  $H$  – сепарабельное гильбертово пространство и  $\{e_i\}$  – ортонормированный базис в нём. Если  $x$  – любой элемент из  $H$ , то  $\tilde{x} = (c_1, c_2, \dots)$ ,  $c_i = (x, e_i)$  и так как  $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|\tilde{x}\|_{l_2}^2 = \|x\|_H^2 < +\infty$ , то  $\tilde{x} \in l_2$ . Пусть  $x, y \in H$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  - числа из поля. Ясно, что  $\alpha x + \beta y \in H$ ,  $\alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y} \in l_2$ ,  $\|\alpha x + \beta y\|_H = \|\alpha \tilde{x} + \beta \tilde{y}\|_{l_2}$ , следовательно отображение  $H \rightarrow l_2$  сохраняет линейную операцию и расстояние. Обратно, пусть  $\tilde{z} = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2$ . Рассмотрим в  $H$  последовательность  $z_n = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ . Так как

$$\|z_m - z_n\|^2 = \sum_{i=m+1}^n |\xi_i|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n, m \rightarrow \infty, \quad \text{то последовательность} \quad \{z_n\} \quad -$$

фундаментальная. В силу полноты  $H$  имеет место  $z_n \rightarrow z \in H$ , а имея в виду  $(z, e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n, e_i) = \xi_i$ , получаем для любого  $\tilde{z} \in l_2$  элемент  $z \in H$ , где  $\xi_i$  - коэффициенты Фурье. Таким образом отображение взаимно однозначно, а из рассуждений выше следует, что оно изометрично и изоморфно. Теорема доказана.

### 31. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.

**Теорема 6 (теорема Рисса-Фишера).** Пространства  $L_2(E)$  и  $l_2$  изоморфны и изометричны, причём  $\int_E |f(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ , где  $c_i = \int_E f(x) \overline{e_i(x)} dx = (f, e_i)$ .

**Теорема 7.** В сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  ограниченная последовательность  $\{x_n\}$  содержит слабо сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.** Пусть  $\|x_n\| \leq C$  и так как  $H$  – сепарабельно, то в нём существует ортонормированный базис  $\{e_i\}$ . В силу  $|(x_{n_k}, e_1)| \leq \|x_{n_k}\| \leq C$  по теореме Больцано-Вейерштрасса существует подпоследовательность  $\{x_{n_{k_1}}\}$  для которой  $(x_{n_{k_1}}, e_1)$  сходится. Так как  $|(x_{n_{k_1}}, e_2)| \leq \|x_{n_{k_1}}\| \leq C$  то существует подпоследовательность  $\{x_{n_{k_1 k_2}}\}$  для которой  $(x_{n_{k_1 k_2}}, e_2)$  сходится и так далее. Возьмём диагональную последовательность  $\{\tilde{x}_n\}$ , то есть последовательность, где элемент  $\tilde{x}_n$  равен  $n$ -му члену подпоследовательности для базисного элемента  $e_n$ . Для неё  $(\tilde{x}_n, e_k)$  сходится при  $n \rightarrow \infty$  и также сходится  $(\tilde{x}_n, \psi)$ , где  $\psi = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$  – любая линейная комбинация из элементов ортонормированного базиса.

Докажем сходимость последовательности  $(\tilde{x}_n, z)$  для любого элемента  $z \in H$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  – любое наперёд заданное число. Тогда существует линейная комбинация  $\psi = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$  такая, что выполняется неравенство  $\|z - \psi\| < \frac{\varepsilon}{2C+1}$ . Выберем номер  $N=N(\varepsilon)$ , для которого при всех  $n, m \geq N$  выполняется неравенство  $|\langle \tilde{x}_m - \tilde{x}_n, \psi \rangle| < \frac{\varepsilon}{2C+1}$ . Тогда  $|\langle \tilde{x}_m, z \rangle - \langle \tilde{x}_n, z \rangle| \leq |\langle \tilde{x}_m - \tilde{x}_n, z - \psi \rangle| + |\langle \tilde{x}_m - \tilde{x}_n, \psi \rangle| \leq (\|\tilde{x}_m\| + \|\tilde{x}_n\|) \|z - \psi\| + \frac{\varepsilon}{2C+1} < 2C \frac{\varepsilon}{2C+1} + \frac{\varepsilon}{2C+1} = \varepsilon$ , тем самым сходимость последовательности  $(\tilde{x}_n, z)$  доказана для любого  $z \in H$ .

Покажем, что существует слабый предел  $x_0$  последовательности  $\{x_n\}$ . Обозначим  $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{x}_n, z)$  – линейный функционал на  $H$ . По теореме Рисса-Фреше  $f(z) = (x_0, z)$ , то есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{x}_n, z) = (x_0, z)$ , а, значит,  $x_0$  – слабый предел для  $\{\tilde{x}_n\}$ . Теорема доказана.

---

### 32. Сопряженный оператор. Теорема о сопряженном операторе. Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряженного.

Введём понятие сопряжённого оператора  $A^*$ . Пусть  $A$  – линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства  $X$  в линейное нормированное пространство  $Y$ , или  $y = Ax$ . Если  $\varphi(y)$  – любой линейный функционал, определённый на  $X$ :  $|f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\| \|Ax\| \leq \|\varphi\| \|A\| \|x\|$ . Таким образом любому линейному функционалу  $\varphi \in Y^*$  ставится в соответствие линейный функционал  $f \in X^*$ , то есть построен оператор, определённый на  $Y^*$  со значениями в  $X^*$ . Этот оператор обозначим  $A^*$  и назовём сопряжённым:  $f = A^* \varphi$ . Если записать значение функционала  $f(x) = (f, x)$ , то можно написать  $(A^* \varphi, x) = (\varphi, Ax)$ . Легко проверяется свойство сопряжённого оператора: если  $A$  и  $B$  – линейные ограниченные операторы, то  $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A \in Z(X \rightarrow Y)$ . Тогда существует  $A^* \in Z(Y^* \rightarrow X^*)$ , то есть  $A^*$  – линейный ограниченный оператор, причём  $\|A\| = \|A^*\|$ .

**Доказательство.** Из определения оператора следует цепочка соотношений  $|A^* \varphi(x)| = |f(x)| = |\varphi(Ax)| \leq \|\varphi\| \|Ax\| \leq \|\varphi\| \|A\| \|x\|$ , откуда сначала следует неравенство  $\|f\| \leq \|\varphi\| \|A\|$ , а затем оценка  $\|A^*\| \leq \|A\|$ . Далее, пусть  $x_0$  – любой элемент пространства  $X$ . По первому следствию из теоремы Хана-Банаха существует линейный функционал  $\varphi_0 \in Y^*$  такой, что  $\|\varphi_0\| = 1$  и  $\varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$ . Тогда  $\|Ax_0\| = \varphi_0(Ax_0) = f_0(x_0) \leq \|f_0\| \|x_0\| = \|A^* \varphi_0\| \|x_0\| \leq \|A^*\| \|\varphi_0\| \|x_0\| = \|A^*\| \|x_0\|$ . Отсюда в силу произвольности элемента  $x_0$  получаем оценку  $\|A\| \leq \|A^*\|$ , а, затем, и равенство  $\|A\| = \|A^*\|$ . Теорема доказана.

Оператор  $A^*$  сопряжён к линейному непрерывному оператору  $A$ , действующему в гильбертовом пространстве  $H$ , если для любых элементов  $x, y \in H$  выполняется равенство  $(Ax, y) = (x, A^* y)$ .

**Теорема 2.** Если  $A \in Z(H \rightarrow H)$ ,  $H$  – гильбертово пространство, то  $H = \overline{\text{Im } A} \oplus \text{Ker } A^*$ .

**Доказательство.** Так как  $\overline{\text{Im } A}$  – подпространство, то  $H = \overline{\text{Im } A} \oplus (\overline{\text{Im } A})^\perp$ . По теореме 1 существует линейный ограниченный оператор  $A^*$ . Покажем, что  $\text{Ker } A^* = (\overline{\text{Im } A})^\perp$ . Если  $x \in \text{Ker } A^*$ , то  $A^* x = 0$  и для любого  $y \in H$  справедливо равенство  $(y, A^* x) = (Ay, x) = 0$ , то есть  $x \perp Ay$ , при  $x \perp \text{Im } A$ . Отсюда следует, что  $x \perp \overline{\text{Im } A}$ , а потому  $x \in (\overline{\text{Im } A})^\perp$ . Обратно  $x \in (\overline{\text{Im } A})^\perp$ , следовательно,  $x \perp \overline{\text{Im } A}$ , или даже  $x \perp \text{Im } A$ . Значит  $(Ay, x) = 0$  для всех  $x$  и  $y$  из  $H$ . Но  $(Ay, x) = (y, A^* x) = 0$ , или полагая  $y = A^* x$ , получим  $\|A^* x\| = 0$ ,  $A^* x = 0$ , то есть  $x \in \text{Ker } A^*$ . Теорема доказана.

---

### **33. Вполне непрерывный оператор. Пример интегрального вполне непрерывного оператора. Свойства вполне непрерывного оператора.**

**Определение 1.** Множество  $M$  линейного нормированного пространства  $X$  называется компактным, если любая последовательность его элементов содержит фундаментальную подпоследовательность.

**Определение 2.** Линейный оператор  $A$ , действующий из линейного нормированного пространства  $X$  в линейное нормированное пространство  $Y$ , называется вполне непрерывным (компактным), если он всякое ограниченное множество переводит в компактное.

Любой ограниченный оператор переводит ограниченное множество в ограниченное и компактное в компактное. Вполне непрерывный оператор является ограниченным, а любой ограниченный оператор в конечномерном пространстве – компактным. В бесконечномерном пространстве единичный (тождественный) оператор – ограничен, но не компактен.

**Теорема 1 (критерий компактности в  $C(E)$ ).** Для того, чтобы множество  $K$  было компактным в  $C(E)$  необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) множество  $K$  - равномерно ограничено в  $C(E)$ , то есть существует постоянная  $M$  такая, что  $\|x(t)\|_{C(E)} \leq M$  для любой функции  $x(t) \in K$ ;
- 2) множество  $K$  - равномерно непрерывно в  $C(E)$ , то есть для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  и такое, что как только  $|h| < \delta$ ,  $x, x + h \in E$ , будет выполняться неравенство  $\|x(t+h) - x(t)\|_{C(E)} < \varepsilon$  для любой функции  $x(t) \in K$ .

**Теорема 2 (критерий компактности в  $L_p(E)$ ).** Для того чтобы множество  $K \subset L_p(E)$ ,  $p \geq 1$ ,  $|E| < +\infty$ , было компактно в  $L_p(E)$  необходимо и достаточно, чтобы это множество было равномерно ограничено в  $L_p(E)$  и равномерно непрерывно в  $L_p(E)$ .

**Пример.** Рассмотрим следующий оператор, действующий в пространстве  $C[a; b]$ :

$$Ax(t) = \int_a^b k(s, t)x(s)ds,$$

где  $k(s, t) \in C[a, b] \times C[a, b]$  — непрерывное ядро. Этот оператор является вполне непрерывным (на основании критерия компактности непосредственно проверяется, что образ любого ограниченного подмножества  $M \subset C[a; b]$  является компактным).

**Лемма 1.** Пусть  $X$  – банахово пространство. Если последовательность элементов  $x_n \in X$  сходится слабо к элементу  $x_0 \in X$ , то  $x_n \rightarrow x_0$  сильно.

**Доказательство.** Пусть это не так: тогда существует  $\varepsilon > 0$  и последовательность номеров  $n_k$  такие, что  $\|x_{n_k} - x_0\| \geq \varepsilon$ . Так как  $\{x_{n_k}\}$  компактна, то она содержит последовательность элементов  $\tilde{x}_n = x_{n_{k_l}}$ , которая сходится сильно к некоторому элементу  $y_0 \in X$ . Тем более последовательность  $\{\tilde{x}_n\}$  сходится слабо к  $x_0$  и поэтому  $x_0 = y_0$ . Итак имеем  $\|\tilde{x}_n - x_0\| \geq \varepsilon$  и  $\|\tilde{x}_n - x_0\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что невозможно. Лемма доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства. Любой вполне непрерывный оператор  $A$ , действующий из  $X$  в  $Y$ , переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в  $X$  в сильно сходящуюся в  $Y$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_n \rightarrow x_0$  слабо, тогда  $\|x_n\| \leq c$  и, значит,  $\{Ax_n\}$ -компактна. Кроме того,  $Ax_n \rightarrow Ax_0$  слабо в  $Y$ , так как, взяв произвольный функционал  $\varphi \in Y^*$ , получим  $\varphi(Ax_n) = f(x_n)$ , где  $f \in X^*$ ,  $\varphi(Ax_0) = f(x_0)$ . Из слабой сходимости  $\{x_n\}$  к  $x_0$  следует  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , или  $\varphi(Ax_n) \rightarrow \varphi(Ax_0)$ . Таким образом, последовательность  $\{Ax_n\}$  сходится слабо к  $Ax_0$ . По лемме 1 эта последовательность сходится сильно к  $Ax_0$ . Теорема доказана.

Если оператор  $A$  – вполне непрерывен, а  $B$  – ограничен, то операторы  $AB$  и  $BA$  – вполне непрерывные.

**Теорема 4.** Если  $A$  – вполне непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства  $H$  в  $H$ , то оператор  $A^*$  также вполне непрерывен.

**Доказательство.** Пусть  $x_n \rightarrow x_0$  слабо. Докажем, что  $A^*(x_n - x_0) \rightarrow 0$  сильно. Действительно,  $\|A^*(x_n - x_0)\|^2 = (A^*(x_n - x_0), A^*(x_n - x_0)) = (x_n - x_0, AA^*(x_n - x_0)) \leq \|x_n - x_0\| \|AA^*(x_n - x_0)\| \rightarrow 0$ , так как  $\|x_n - x_0\| \leq c$ ,  $AA^*$  – вполне непрерывен и по теореме 4  $AA^*(x_n - x_0) \rightarrow 0$  сильно. Поскольку любое в  $H$  ограниченное множество – слабо компактно, то оператор  $A^*$  переводит ограниченное множество в компактное, то есть является вполне непрерывным.

### 34. Первая теорема Фредгольма.

**Лемма 1.** Многообразие  $\text{Im}L$  – замкнуто, где  $\text{Im}L = \{y \in H: y = Lx\}$ .  $L = I - A$

**Доказательство.** Докажем, что  $\text{Im}L = \overline{\text{Im}L}$ , то есть, если  $y_n \in \text{Im}L$  и  $y_n \rightarrow y \in H$ , то  $y \in \text{Im}L$ . По условию  $y_n = Lx_n = x_n - Ax_n \rightarrow y$ . Будем считать, что  $x_n \perp \text{Ker}L$ , ибо в противном случае перейдем к  $x_n - Px_n$ , где  $P$  – ортопроектор на  $\text{Ker}L$ , причем  $L(Px_n) = 0$ . Покажем, что  $\|x_n\| \leq C$ . Если это не так, то существует подпоследовательность  $\{x'_n\}$  последовательности  $\{x_n\}$ :  $\|x'_n\| \rightarrow +\infty$ . По условию  $y_n \rightarrow y$ , значит  $\|y_n\| \leq C_1$ , что приводит к соотношению  $\frac{\|x'_n - Ax'_n\|}{\|x'_n\|} = \frac{\|y'_n\|}{\|x'_n\|} \rightarrow 0$ . Так как  $A$  – вполне непрерывный оператор, а последовательность  $\left\{ \frac{x'_n}{\|x'_n\|} \right\}$  ограничена, то существует подпоследовательность  $\{x''_n\}$  последовательности  $\{x'_n\}$  такая, что последовательность  $\left\{ \frac{Ax''_n}{\|x''_n\|} \right\}$  сходится. Но когда сходится и последовательность  $\{z_n\}$ , где  $z_n = \frac{x''_n}{\|x''_n\|}$ . Пусть  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  и в силу  $\|z_n\| = 1$  имеет место  $\|z\| = 1$ . С другой стороны  $Lz_n \rightarrow 0$  и из сходимости  $z_n \rightarrow z$  следует  $Lz = L(z - z_n) + Lz_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть  $Lz = 0$  и, значит,  $z \in \text{Ker}L$ . Однако все  $x_n \perp \text{Ker}L$ , поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = z \perp \text{Ker}L$ , или элемент  $z$  ортогонален самому себе. Это возможно только если  $z = 0$  и мы получили противоречие с равенством  $\|z\| = 1$ . Итак,  $\|x_n\| \leq C$ , а поэтому существует сходящаяся подпоследовательность  $\{A\tilde{x}_n\}$ . Отсюда следует сходимость подпоследовательности  $\{\tilde{x}_n\}$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = x \in H$ . В пределе получим  $Lx = y$ , то есть  $y \in \text{Im}L$ . Теорема доказана.

**Лемма 2.**  $H = \text{Ker}L \oplus \text{Im}L^*$ ,  $H = \text{Ker}L^* \oplus \text{Im}L$ .

Непосредственным следствием леммы 2 является следующая

**Теорема 1 (1-я теорема Фредгольма).** Уравнение  $Lx = f$  разрешимо тогда и только тогда, когда  $f \perp \text{Ker}L^*$ , то есть элемент  $f$  ортогонален любому решению уравнения  $L^*y = 0$ .

Для любого натурального числа  $k$  положим  $H^k = \text{Im}L^k$ , в частности,  $H^0 = H = \text{Im}L^0$ , где  $L^0 = I$ ,  $H^1 = \text{Im}L$  и так далее. По лемме 1 все  $H^k$  – замкнуты и очевидно  $H \supset H^1 \supset H^2 \supset \dots$ , причем  $L(H^k) = H^{k+1}$ .

**Лемма 3.** Существует номер  $j$  такой, что  $H^{k+1} = H^k$  при всех  $k \geq j$ .

**Доказательство.** Если это не так, то все подпространства  $H^k$  различны, поэтому по теореме Леви можно построить ортонормированную систему  $\{x_k\}$  так, что  $x_k \in H^k$  и  $x_k \perp H^{k+1}$ . Пусть  $l > k$ :  $Ax_l - Ax_k = -x_k + (x_l + Lx_k - Lx_l)$ . Выражение в скобках принадлежит  $H^{k+1}$  и  $x_k \perp H^{k+1}$ , поэтому  $\|Ax_l - Ax_k\| \geq \|x_k\| = 1$ , то есть из последовательности  $\{Ax_k\}$  нельзя выделить сильно сходящуюся подпоследовательность, что противоречит полной непрерывности оператора  $A$ .

---

### 35. Вторая теорема Фредгольма.

**Лемма 4.** Если  $\text{Ker} L = 0$ , то  $\text{Im} L = H$ . Если  $\text{Ker} L^* = 0$ , то  $\text{Im} L^* = H$ .

**Доказательство.** Если  $\text{Ker} L = 0$ , то оператор  $L$  отображает  $H$  на  $H$  взаимно однозначно, а при  $\text{Im} L \neq H$  цепочка  $H^k$  состоит из различных подпространств. По лемме 3 их конечное число, то есть если  $x_0 \in H \setminus H^1$  и номер  $k$  такой, что  $H^k = H^{k+1}$ , тогда  $L^k x_0 \in H^k$  и существует  $y \in H$ :  $L^k x_0 = L^{k+1} y$ , или  $L(L^{k-1} x_0 - L^k y) = 0$ . Так как  $\text{Ker} L = 0$ , то  $L^{k-1} x_0 = L^k y$  и так далее. В итоге получим  $x_0 = L y$ , что означает  $x_0 \in H^1$ . Полученное противоречие доказывает равенство  $\text{Im} L = H$ . Аналогично устанавливается соотношение  $\text{Im} L^* = H$ , если  $\text{Ker} L^* = 0$ . Лемма доказана.

**Лемма 5.** Если  $\text{Im} L = H$ , то  $\text{Ker} L = 0$ .

Так как  $\text{Im} L = H$ , то по лемме 2  $\text{Ker} L^* = 0$ , но тогда по лемме 4  $\text{Im} L^* = H$ . Снова применяя лемму 2, получим  $\text{Ker} L = 0$ .

Из лемм 4 и 5 непосредственно следует

**Теорема 2 (2-я теорема Фредгольма или альтернатива Фредгольма).** Либо уравнение  $Lx = f$  имеет единственное решение при любой правой части  $f \in H$ , либо уравнение  $Lx = 0$  имеет ненулевое решение.

---

### 36. Третья теорема Фредгольма.

**Теорема 3 (3-я теорема Фредгольма).** Однородные уравнения  $Lx = 0$  и  $L^* y = 0$  имеют одно и то же и при том конечное число линейно независимых решений.

**Доказательство.** Пусть  $\mu = \dim \text{Ker} L$ ,  $\nu = \dim \text{Ker} L^*$ . Если  $\mu = +\infty$ , то в подпространстве  $\text{Ker} L$  существует счетная ортонормированная система  $\{x_k\}$ . Из  $Lx_k = 0$  следует равенство  $Ax_k = x_k$ , причем при  $l \neq k$ :  $\|Ax_l - Ax_k\| = \|x_l - x_k\| = \sqrt{2}$ , то есть из последовательности  $\{Ax_k\}$  нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит полной непрерывности оператора  $A$ . Таким образом  $\mu, \nu < +\infty$ .

Докажем равенство  $\mu = \nu$ . Пусть  $\{\varphi_i\}$  и  $\{\psi_j\}$  – ортонормированные базисы соответственно в  $\text{Ker} L$  и  $\text{Ker} L^*$ . От противного, предположим  $\mu < \nu$ . Получим

$$Sx = Lx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j) \psi_j.$$

Так как оператор  $S$  получается сложением оператора  $L$  и конечномерного оператора, то все результаты для оператора  $L$  справедливы и для  $S$ . Покажем, что

уравнение  $Sx = 0$  имеет только тривиальное решение. Итак,  $Lx + \sum_{j=1}^{\mu} (x, \varphi_j) \psi_j = 0$ . По

лемме 2  $(Lx, \psi_j) = 0$ , значит  $(x, \varphi_j) = 0$  для всех  $j = 1, 2, \dots, \mu$ . Поэтому  $Lx = 0$ , то есть  $x \in \text{Ker} L$  и одновременно  $x \perp \text{Ker} L$ , следовательно  $x = 0$ .

Из утверждения о том, что уравнение  $Sx = 0$  имеет только тривиальное решение по 2-ой теореме Фредгольма следует существование элемента  $y$ , для

каждого справедливо равенство  $Ly + \sum_{j=1}^{\mu} (y, \varphi_j) \psi_j = \psi_{\mu+1}$ .

Умножая это равенство скалярно на  $\psi_{\mu+1}$ , получим слева 0, а справа 1, ибо  $Ly \in \text{Im} L$ , а  $\text{Im} L \perp \text{Ker} L^*$ . Противоречие означает, что  $\mu \geq \nu$ . Заменяя теперь в наших рассуждениях  $L$  на  $L^*$ , докажем неравенство  $\mu \leq \nu$ . Таким образом  $\mu = \nu$  и теорема доказана.

---

### 37. Понятие о спектре линейного оператора в бесконечномерных пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта.

Пусть  $X$  – банахово пространство над полем комплексных чисел. Оператор  $A \in L(X \rightarrow X)$ , то есть линейный ограниченный оператор, действующий из  $X$  в  $X$ .

**Определение 1.** Резольвентное множество  $\rho(A)$  оператора  $A$  есть множество комплексных чисел  $\lambda$ , для которых существует  $(\lambda I - A)^{-1}$  – ограниченный оператор, определенный на всем  $X$ . Спектром  $\sigma(A)$  оператора  $A$  называется дополнение к множеству  $\rho(A)$  на комплексной плоскости, то есть  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ .

**Определение 2.** Операторнозначная функция  $\rho(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ , определенная на множестве  $\rho(A)$ , называется резольвентой оператора  $A$ , а  $\lambda \in \rho(A)$  называется регулярным значением оператора  $A$ .

Таким образом,  $\lambda$  – регулярно, если:

1.  $\text{Ker}(\lambda I - A) = \{0\}$ ;
2.  $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ ;
3.  $\|(\lambda I - A)^{-1}\| < +\infty$ .

**Определение 3.** Комплексное число  $\lambda$  называется собственным значением оператора  $A$ , если  $\text{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$ , а любой не равный нулю элемент  $x \in \text{Ker}(\lambda I - A)$  называется собственным элементом, отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

**Теорема 1.** Резольвентное множество  $\rho(A)$  – открыто.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  – фиксированное число из  $\rho(A)$ , а  $\mu$  – любое комплексное число такое, что  $|\mu| < \|R(\lambda, A)\|^{-1}$ . Покажем, что  $\lambda + \mu \in \rho(A)$ . Введем в рассмотрение оператор

$$s(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k (\lambda I - A)^{-(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mu)^k (R(\lambda, A))^{k+1}.$$

Так как по условию  $|\mu| \|R(\lambda, A)\| < 1$ , то ряд сходится сильно (по норме в  $L(X \rightarrow X)$ ).

Далее,  $((\lambda + \mu)I - A)s(\mu) = (\lambda I - A)s(\mu) + \mu s(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \{(-\mu R(\lambda, A))^k - (-\mu R(\lambda, A))^{k+1}\} = I$ , то есть  $s(\mu) = R(\lambda + \mu, A)$  – ограниченный оператор и  $\lambda + \mu \in \rho(A)$ . **Теорема доказана.**

**Следствие.** Спектр  $\sigma(A)$  – замкнут.

**Теорема 2.** Пусть  $X$  – банахово бесконечномерное пространство и  $A$  – вполне непрерывный оператор в нем. Тогда  $0 \in \sigma(A)$ , то есть  $\lambda = 0$  не является регулярным значением.

Если бы  $0 \in \rho(A)$ , то оператор  $A$  имел бы ограниченный обратный оператор и оператор  $AA^{-1} = I$  являлся вполне непрерывным, что невозможно.

**Теорема 3 (теорема Гильберта-Шмидта).** Пусть  $A = A^*$  – вполне непрерывный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда любой элемент  $x \in \text{Im} A$  представим в виде ряда Фурье

$$x = \sum_{\lambda_k \neq 0} (x, e_k) e_k$$

по собственным элементам  $e_k$  оператора  $A$ , образующим ортонормированную систему.

**Замечание.** Для всякого самосопряженного вполне непрерывного оператора  $A$  в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  существует ортонормированный базис пространства  $H$ , состоящий из собственных векторов этого оператора. Для этого достаточно систему из теоремы 3 дополнить произвольным ортонормированным базисом из  $\text{Ker} A$ .

---

#### 44. Три теоремы Фредгольма

**Теорема I.** Неоднородное уравнение  $Lx = f$  разрешимо  $\Leftrightarrow$  правая часть  $f$  ортогональна любому решению неоднородного уравнения  $Lx = 0$ , т.е.  $f \perp \text{Ker}(L)$ .

**Теорема II** (альтернатива Фредгольма). Либо неоднородное уравнение имеет единственное решение при любой правой части, либо однородное уравнение имеет ненулевое решение.

**Теорема III.** Однородное уравнение  $Lx = 0$  и сопряженное однородное уравнение  $L^* y = 0$  имеют одинаковое и конечное число линейно независимых решений.